FUNÇÕES GERADORAS

- CONSIDERE UM RETÂNGULO $R(m)$ DE TAMANHO $2 \times m$

↝ DE QUANTAS FORMAS PODEMOS PARTICIONAR $R(m)$ EM RETÂNGULOS DE TAMANHO 2×1 (OU 1×2)?

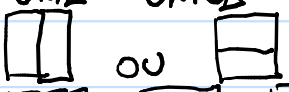
↳ DOMINÓS

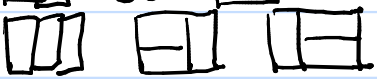
OBS: OS DOMINÓS PODEM SER COLOCADOS NA VERTICAL OU HORIZ.

↝ LADRILHAGEM

EX: $R(0)$, NÃO HÁ O QUE FAZER: HÁ UMA ÚNICA FORMA, NÃO COLOCAR DOMINÓ

$R(1)$: UMA ÚNICA FORMA: UM DOMINÓ NA VERTICAL

$R(2)$:  OU

$R(3)$: 

IDEIA: TODA CONFIGURAÇÃO COMEÇA POR  OU 

LOGO O NÚMERO T_m DE CONFIGURAÇÕES É DADO POR:

$$T_m = T_{m-1} + T_{m-2}$$

↝ IGUAL AOS NÚMEROS DE FIBONACCI.

IDEIA 2: "SOMAR" LADRILHAGENS

SOMA FORMAL, A MULTIPLICAÇÃO É UMA CONCATENAÇÃO NÃO-COMUTATIVA

VAZIO

$T = 1 +$  $+$  $+$  $+$  $+$  $+ \ldots$

$T = \square + \square + \square\square + \square\square + \square\square\square + \square\square + \cdots$

$= \square + \square\left(\square + \square\square + \square\square\square + \square\square + \cdots\right) + \square\square\left(\square + \square + \square\square + \cdots\right)$

$= \square + \square T + \square\square T$

QUE NOS DÁ $\quad (\square - \square - \square\square)\, T = \square$

E $\quad T = \dfrac{\square}{(\square - \square - \square\square)}$

USANDO QUE $\dfrac{1}{1-z} = 1 + z^2 + z^3 + \cdots$, TEMOS QUE

$$T = \square + (\square + \square\square) + \underbrace{(\square + \square\square)^2}_{\square\square + \square\square + \square\square + \square\square} + (\square + \square\square)^3 + \cdots$$

SE COLOCARMOS $\square = z$ E $\square\square = z^2$, ESTAREMOS BUSCANDO O COEFICIENTE DE z^n.

$$T = \frac{\square}{\square - z - z^2} = \square + (z + z^2) + (z + z^2)^2 + \cdots$$

$$= \sum_{K \geq 0} (z + z^2)^K$$

$$= \sum_{J,K \geqslant 0} \binom{K}{J} z^J z^{2(K-J)} \qquad = \sum_{J,K \geqslant 0} \binom{J+M}{J} z^J z^{2M}$$

Troco

Utilizando apenas moedas de 1, 5, 10, 25, e 50, de quantas formas posso devolver n centavos de troco?

↝ A ordem das moedas não importa

↝ Ideia: ir aos trocos, moeda por moeda.

Trocos apenas com 1:

$$P = \phi + (1) + (1)(1) + \cdots = \phi + (1) + (1)^2 + (1)^3$$

Para cada troco de P podemos construir um troco usando também moedas de 5

$$\begin{aligned} N &= P + (5)P + (5)^2 P + \cdots \\ &= (1 + (5) + (5)^2 + \cdots)P \end{aligned}$$

No final das contas os trocos são

$$\begin{aligned} C = &(\phi + (50) + (50)^2 + \cdots)(\phi + (25) + (25)^2 + \cdots) \cdot (\phi + (10) + (10)^2 + \cdots) \\ &\cdot (\phi + (5) + (5)^2 + \cdots)(\phi + (1) + (1)^2 + \cdots) \end{aligned}$$

Se tomarmos $(1) = z$, $(5) = z^5$, $\ldots$, $50 = z^{50}$, o troco de valor n é precisamente o coeficiente de z^n

Assim, como $\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots$, temos

$$C = \frac{1}{1-z} \cdot \frac{1}{1-z^5} \cdot \frac{1}{1-z^{10}} \cdot \frac{1}{1-z^{25}} \cdot \frac{1}{1-z^{50}}$$

↝ Número de partições de inteiros.

UMA FUNÇÃO GERADORA TEM A FORMA

$$G(z) = g_0 + g_1 z + g_2 z^2 + \cdots = \sum_{n \geq 0} g_n z^n$$

DIZEMOS QUE G É A FUNÇÃO GERADORA DA SEQ. $\langle g_0, g_1, \ldots \rangle = \langle g_n \rangle$

↝ PODEMOS TOMAR A SOMA EM TODOS OS INTEIROS E CONSIDERAR

$$g_{-1} = g_{-2} = \cdots = 0$$

↝ HÁ DOIS TIPOS DE FORMA FECHADA:

a) UMA EQUAÇÃO PARA $G(z)$ ↝ "DUALIDADE"
b) UMA EQUAÇÃO PARA g_n

LEMBREMOS QUE UMA SÉRIE $\sum_{k \geq 0} g_n z^n$ CONVERGE (ABSOLUTAMENTE) SE E SOMENTE SE EXISTE UMA CONSTANTE A T.Q. $\sum_{k=0}^{r} |g_n z^n| \leq A \ \forall r$.

LOGO, COMO $G(0) = g_0$, EXISTE z_0 T.Q. $G(z)$ CONVERGE $\forall z \leq z_0$

OBS: $\lim_{n \to \infty} |g_n z_0^n| \to 0$

TAMBÉM PODEMOS DIZER $g_n = O(|1/z_0|^n))$
RECIPROCAMENTE, SE $g_n = O(M^n)$, ENTÃO $\sum_{n \geq 0} g_n z^n$ CONVERGE $\forall z$ COM $|z| < 1/M$.

PROPRIEDADES

$F(z)$ E $G(z)$ SÃO FUNC. GER. DE $\langle f_n \rangle$ E $\langle g_n \rangle$

- **COMBINAÇÃO LINEAR**: SEJAM α, β CONSTANTES

$$\rightsquigarrow \alpha F(z) + \beta G(z) = \alpha \sum_{n \geq 0} f_n z^n + \beta \sum_{n \geq 0} g_n z^n = \sum_{n \geq 0} (\alpha f_n + \beta g_n) z^n$$

É A FUNC. GER. DE $\langle \alpha f_n + \beta g_n \rangle$.

- **DESLOCAMENTO**: SEJA $m \in \mathbb{N}$.

$$\rightsquigarrow z^m G(z) = \sum_{n \geq 0} g_n z^{n+m} = \sum_{n \geq 0} g_{n-m} z^n$$

É A FUNC. GER. DE $\langle \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{m}, g_0, g_1, \ldots \rangle$

$$\rightsquigarrow \frac{G(z) - g_0 - g_1 z - \ldots - g_{m-1} z^{m-1}}{z^m} = \sum_{n \geq m} g_n z^{n-m} = \sum_{n \geq 0} g_{n+m} z^n$$

- **SUBSTITUIR z POR cz**:

$$\rightsquigarrow G(cz) = \sum_{n \geq 0} g_n (cz)^n = \sum_{n \geq 0} c^n g_n z^n$$

É A FUNC. GER. DE $\langle c^n g_n \rangle$ (JÁ VIMOS COM $c = -1$)

- **DERIVAÇÃO**:

$$\rightsquigarrow G'(z) = \sum_{n \geq 1} n g_n z^{n-1} = \sum_{n \geq 0} (n+1) g_{n+1} z^n$$

É A FUNC. GER. DE $\langle (n+1) g_{n+1} \rangle$

$\rightsquigarrow zG'(z)$ É A FUNC. GER. DE $\langle n g_n \rangle$

OBS: PODEMOS MULTIPLICAR POR QUALQUE POLINÔMIO E DERIVAR REPETIDAMENTE

- **Integração**

$$\rightsquigarrow \int_0^z G(t)\,dt = g_0 z + \frac{1}{2} g_1 z^2 + \frac{1}{3} g_2 z^3 + \cdots = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} g_{n-1} z^n$$

É a func. ger. de $\langle g_{n-1}/n \rangle$

Se quisermos a func. ger. de $\langle g_n/n \rangle$ devemos deslocar para a esq, trocando $G(t)$ por $\dfrac{G(t) - g_0}{t}$ na integral.

- **Multiplicação:**

$$\rightsquigarrow F(z)\,G(z) = (f_0 + f_1 z + f_2 z^2 + \cdots)(g_0 + g_1 z + g_2 z^2 + \cdots)$$

$$= f_0 g_0 + (f_1 g_0 + f_0 g_1) z + (f_2 g_0 + f_1 g_1 + f_0 g_2) z^2 + \cdots$$

$$= \sum_n \left(\sum_k f_k g_{n-k} \right) z^k$$

É a func. ger. de $\left\langle \sum_k f_k g_{n-k} \right\rangle$

Relações de Recorrência

- Considere uma seq. $\langle g_n \rangle$, onde g_n é dada por uma relação de recorrência.

↦ Queremos encontrar uma fórmula para g_n em função de n.

Estratégia

1) escrever g_n em função dos outros elementos de $\langle g_n \rangle$ ($\forall n \in \{\dots,-2,-1,0,1,2,\dots\}$)
2) Multiplicar por z^n dos dois lados
3) somar sobre n ↦ obtendo $\sum g_n z^n = G(z)$ na eq.
4) simplificar o lado dir. para obter uma eq. em função de $G(z)$

Ex: Fibonacci

$$g_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \leq 0 \\ 1 & \text{se } n = 1 \\ g_{n-1} + g_{n-2} & \text{se } n > 1 \end{cases} \quad \text{↦ } g_1 \neq g_0 + g_{-1}$$

1. Fórmula geral : $g_n = g_{n-1} + g_{n-2} + [n=1]$

2. $z^n g_n = z^n \cdot g_{n-1} + z^n g_{n-2} + z^n [n=1]$

3. $G(z) = \sum_n g_n z^n = z \cdot \sum_n g_{n-1} z^{n-1} + z^2 \sum_n g_{n-2} z^{n-2} + z$

4! $= zG(z) + z^2 G(z) + z$

$\Rightarrow G(z) = z / (1 - z - z^2)$

→

TEOREMA DA EXPANSÃO RACIONAL: SEJA $R(z) = P(z)/Q(z)$, ONDE $Q(z) = q_0(1-p_1 z)\cdots(1-p_\ell z)$, $p_i \neq p_j \ \forall i,j$ E $P(z)$ É UM POLINÔMIO DE GRAU MENOR QUE ℓ. ENTÃO

$$[z^n]R(z) = a_1 p_1^n + \cdots + a_\ell p_\ell^n, \text{ ONDE } a_k = -p_k P(1/p_k)/Q'(1/p_k)$$

- VOLTANDO A FIBONACCI, TEMOS $G(z) = z/(1-z-z^2)$

↝ USANDO A FÓRMULA DE BHASKARA, DESCOBRIMOS QUE AS RAÍZES DE $Q(z)$ SÃO

$$\frac{1}{p_1} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} \quad \text{E} \quad \frac{1}{p_2} = \frac{2}{1-\sqrt{5}}$$

↝ ASSIM, PELO TEO. DA EX. RACIONAL, TEMOS

$$a_1 = -p_1 \frac{1/p_1}{-1-2\,1/p_1} = \frac{1}{1-2/p_1} = \frac{p_1}{p_1-2} = \frac{(1+\sqrt{5})/2}{(1+\sqrt{5})/2 - 2}$$

$$= \frac{(1+\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})-4}$$

$$a_2 = \frac{(1-\sqrt{5})}{(1-\sqrt{5})-4}$$

EX: SEQUÊNCIAS SIMULTANEAMENTE RECURSIVAS

$u_0 = 1$ $\qquad$ $v_0 = 0$

$u_1 = 0$ $\qquad$ $v_1 = 1$

$u_n = 2v_{n-1} + u_{n-2}$ $\qquad$ $v_n = u_{n-1} + v_{n-2}$ $\qquad$ $n \geq 2$

1) ACHAR EQ. ABSOLUTA

$$u_n = 2v_{n-1} + u_{n-1} + [n=0] \qquad \forall n$$
$$v_n = u_{n-1} + v_{n-2}$$

2) MULTIPLICAR POR z^n

$$z^n u_n = 2z^n v_{n-1} + z^n u_{n-1} + z^n [n=0]$$
$$z^n v_n = z^n u_{n-1} + z^n v_{n-2}$$

3) $U(z) = 2zV(z) + z^2 U(z) + 1$

$V(z) = zU(z) + z^2 V(z) \qquad \Rightarrow V(z) = \dfrac{zU(z)}{1-z^2}$

SUBSTITUINDO EM $U(z)$ OBTEMOS

$$U(z) = \frac{1-z^2}{1-4z^2+z^4}, \qquad V(z) = \frac{z}{1-4z^2+z^4}$$

$$= (1-z^2)\,W(z^2) \qquad = z\,W(z^2)$$

ONDE $\quad W(z) = \dfrac{1}{1-4z+z^2}$

AS RAÍZES DE $1-4z+z^2$, CUJAS RAÍZES SÃO $2+\sqrt{3}$ E $2-\sqrt{3}$

FINALMENTE, PELO TEO. DA EXP. RACIONAL.

$$V_{2n+1} = W_n = \frac{3+2\sqrt{3}}{6}(2+\sqrt{3})^n + \frac{3-2\sqrt{3}}{6}(2-\sqrt{3})^n$$

$$u_{2n} = W_n - W_{n-1} = \frac{(2+\sqrt{3})^n}{3-\sqrt{3}} + \frac{(2-\sqrt{3})^n}{3+\sqrt{3}}$$

TEOREMA DA EXPANSÃO RACIONAL

CONSIDERE UMA FUNÇÃO RACIONAL $R(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$

ONDE P E Q SÃO POLINÔMIOS.

⇝ QUAL O COEFICIENTE DE z^n? $[z^n]R(z)$

EX: $$\frac{a}{(1-pz)^{m+1}} = \sum \binom{m+n}{m} a p^n z^n$$

EX: $$S(z) = \frac{a_1}{(1-p_1 z)^{m_1+1}} + \frac{a_2}{(1-p_2 z)^{m_2+1}} + \cdots + \frac{a_\ell}{(1-p_\ell z)^{m_\ell+1}}$$

OS COEFICIENTES SÃO $$\sum_k a_k \binom{m_k+n}{m_k} p_k^n$$

VAMOS PROVAR QUE TODA FUNÇÃO RACIONAL T.Q. $R(0) \neq \infty$ PODE SER COLOCADA NA FORMA $R(z) = S(z) + T(z)$, ONDE $T(z)$ É UM POLINÔMIO.

OBS: NOTE QUE $R(z) = \infty$ SEMPRE QUE $Q(z) = 0$
E $S(z) = \infty$ QUANDO $z = 1/p_1, 1/p_2, \ldots, 1/p_\ell$

SUPONHA QUE $Q(z) = q_0 + q_1 z + \cdots + q_m z^m$, $q_0 \neq 0$, $q_m \neq 0$
DENOTAMOS POR $Q^R(z) = q_0 z^m + q_1 z^{m-1} + \cdots + q_m$

SE $Q(p) = 0$, ENTÃO $Q^R(1/p) = q_0 (1/p)^m + q_1 (1/p)^{m-1} + \cdots + q_m$

p É RAIZ DE $Q \Leftrightarrow 1/p$ É RAIZ DE Q^R

$$= (1/p)^m \left(q_0 + q_1 p + \cdots + q_m p^m\right)$$
$$= (1/p)^m Q(p) = 0$$

LOGO, TEMOS

$$Q^R(z) = q_0 (z - p_1) \cdots (z - p_\ell) \Leftrightarrow Q(z) = q_0 (1 - p_1 z) \cdots (1 - p_\ell z)$$

PARTE 1: RAÍZES DISTINTAS

- SE $p_1, \dots, p_\ell$ SÃO AS RAÍZES DE Q, ENTÃO PODEMOS ESCREVER

$$Q(z) = q_0 (z - p_1) \cdots (z - p_\ell)$$

TEOREMA: SEJA $R(z) = P(z)/Q(z)$, ONDE $Q(z) = q_0(1 - p_1 z) \cdots (1 - p_\ell z)$ SE AS RAÍZES DE $Q(z)$ SÃO DISTINTAS E $P(z)$ É UM POLINÔMIO DE GRAU MENOR QUE $Q(z)$, ENTÃO

$$[z^n] R(z) = a_1 p_1^n + \cdots + a_\ell p_\ell^n$$

ONDE $a_k = -p_k P(1/p_k) / Q(1/p_k)$

PROVA: SEJA $S(z) = \dfrac{a_1}{1 - p_1 z} + \cdots + \dfrac{a_\ell}{1 - p_\ell z}$

SE $R(z) = S(z)$ BASTA USARMOS A FÓRMULA DA PÁGINA ANTERIOR COM $m_1 = m_2 = \cdots = m_\ell = 0$

ASSIM, SEJA $T(z) = R(z) - S(z)$

VAMOS MOSTRAR QUE $\lim_{z \to 1/p_i} T(z) \neq \infty$.

PARA ISSO, VAMOS MOSTRAR QUE $\lim_{z \to 1/p_1} (z - 1/p_1) T(z) = 0$

OU SEJA

$$\lim_{z \to 1/p_1} (z - 1/p_1) R(z) = \lim_{z \to 1/p_1} (z - 1/p_1) S(z)$$