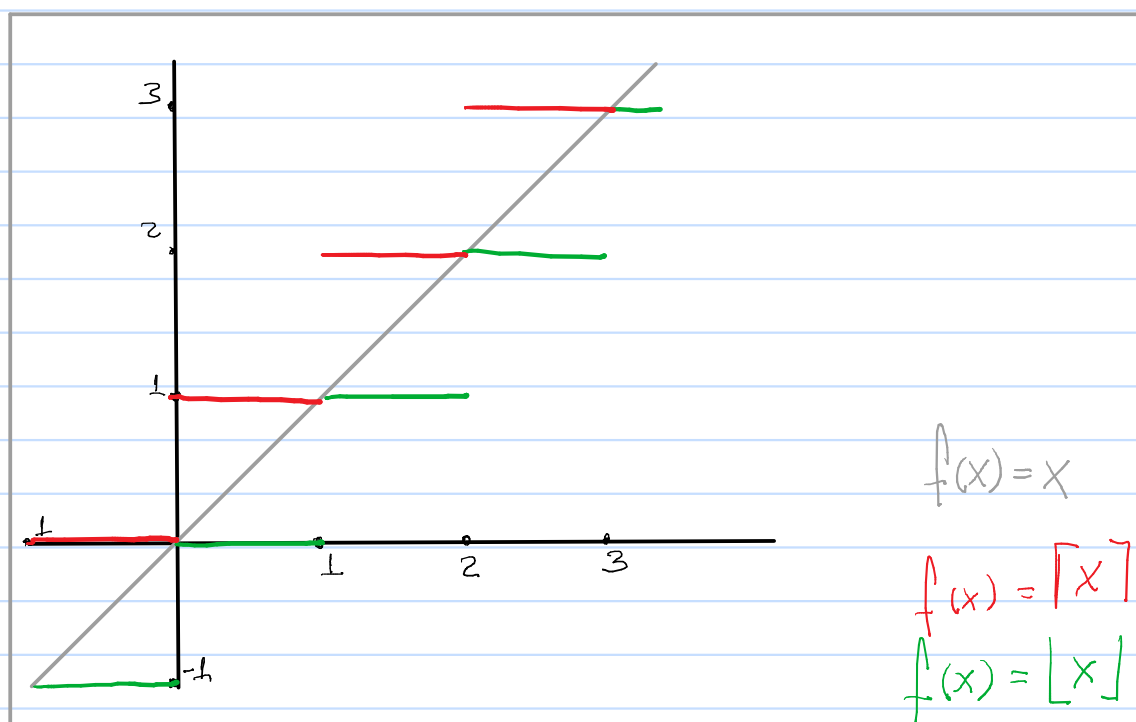


FUNÇÕES INTEIRAS

• PISOS E TETOS

$\lfloor x \rfloor$ = O MAIOR ÍNTEIRO MENOR OU IGUAL A x (Floor)

$\lceil x \rceil$ = O MENOR ÍNTEIRO MAIOR OU IGUAL A x (Ceil)



OBSERVAÇÕES

1) $\lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil$

2) ALÉM DISSO $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$ SOMENTE SE x É ÍNTEIRO

QUANDO x NÃO É ÍNTEIRO, TEMOS $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil - 1$

EX: $\lfloor e \rfloor = 2$ e $\lfloor -e \rfloor = -3$

3) $\lceil x \rceil - \lfloor x \rfloor = \begin{cases} 0 & \text{se } x \text{ é ÍNTEIRO} \\ 1 & \text{se } x \text{ NÃO É ÍNTEIRO} \end{cases}$

4) $x-1 < \lfloor x \rfloor$ e $\lceil x \rceil < x+1$

$x-1 < \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil < x+1$

5) $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$ e $\lceil -x \rceil = -\lfloor x \rfloor$

RESUMINDO

$$\lfloor x \rfloor = m \iff x-1 < m \leq x < m+1$$

$$\lceil x \rceil = m \iff m-1 < x \leq m < x+1$$

- É POSSÍVEL MOVER UM INTEIRO PARA DENTRO DO PISO OU TETO

$$\lfloor x+m \rfloor = \lfloor x \rfloor + m, \quad m \text{ INTEIRO}$$

- OUTRAS PROPRIEDADES INTERESSANTES:

$$\begin{array}{ll} x < m & \lfloor x \rfloor < m \\ m < x & m < \lceil x \rceil \\ x \leq m & \lceil x \rceil \leq m \\ m \leq x & m \leq \lfloor x \rfloor \end{array} \iff \begin{array}{l} m < \lceil x \rceil \\ \lceil x \rceil \leq m \\ m \leq \lfloor x \rfloor \end{array} \quad \begin{array}{l} x \in \mathbb{R} \\ m \in \mathbb{Z} \end{array}$$

- É IMPORTANTE DAR NOME TAMBÉM À PARTE FRACIONÁRIA:

$$\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$$

↳ PARTE INTEIRA

NOTE QUE SE $x = m + \theta$, ONDE $m \in \mathbb{Z}$ E $0 \leq \theta < 1$, ENTÃO TEMOS $m = \lfloor x \rfloor$ E $\theta = \{x\}$.

- VOLTANDO AO CHÃO DA SOMA:

SE $x, y \in \mathbb{R}$, ENTÃO HÁ DUAS POSSIBILIDADES PARA $\lfloor x+y \rfloor$

$$\lfloor x+y \rfloor = \lfloor \lfloor x \rfloor + \{x\} + \lfloor y \rfloor + \{y\} \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor \{x\} + \{y\} \rfloor$$

COMO $0 \leq \{x\}, \{y\} < 1$, TEMOS $0 \leq \{x\} + \{y\} < 2$ E, PORTANTO, $0 \leq \lfloor \{x\} + \{y\} \rfloor \leq 1$

EX: $\log_{35}$ (NA BASE 2).

COMO $2^5 < 35 \leq 2^6$, TEMOS $5 < \log_{35} \leq 6$

LOGO $5 < \lceil \log_{35} \rceil \leq 6$, O QUE IMPLICA $\lceil \log_{35} \rceil = 6$

* Qual o número de bits necessário para escrever n em binário?

~ $\lceil \log n \rceil$? Quase: $32 = 2^5$ precisa de 6 bits, $\lceil \log 32 \rceil = 5$

NOTE QUE SE n PRECISA DE m BITS, ENTÃO TEMOS

$$2^{m-1} \leq n < 2^m$$

Logo, temos $m-1 \leq \log n < m$ e, portanto, $\lceil \log n \rceil = m$.

CONCLUIMOS QUE $m = \lceil \log n \rceil$

* Analogamente, temos $2^{m-1} < n+1 \leq 2^m$, o que implica que

$$m = \lceil \log(n+1) \rceil$$

* O que acontece com $\lfloor \sqrt{x} \rfloor$?

Fácil: $\lfloor x \rfloor$ é inteiro. Logo $\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \rfloor = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$.

ex: $\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \rfloor = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$ VERDADEIRO ou FALSO?

~ VERDADEIRO QUANDO $x \in \mathbb{Z}$

TOME $m = \lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \rfloor$. TEMOS $m \leq \sqrt{\lfloor x \rfloor} < m+1$

$$m^2 \leq \lfloor x \rfloor < (m+1)^2$$

QUADRADO DE TODO

ISSO NOS DÁ $m^2 \leq x < (m+1)^2$

$$m \leq \sqrt{x} < m+1$$

RAÍZ

QUADRADO DE TODO

$$m \leq \sqrt{x} < m+1$$

Logo, temos $m = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$

EXERCÍCIO: PROVE QUE $\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \rfloor = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$ PARA TODO $x \in \mathbb{R}$.

PROP: SEJA f UMA FUNÇÃO CONTÍNUA ESTRITAMENTE CRESCENTE TAL QUE

SE $f(x) \in \mathbb{Z}$, ENTÃO $x \in \mathbb{Z}$. (*)

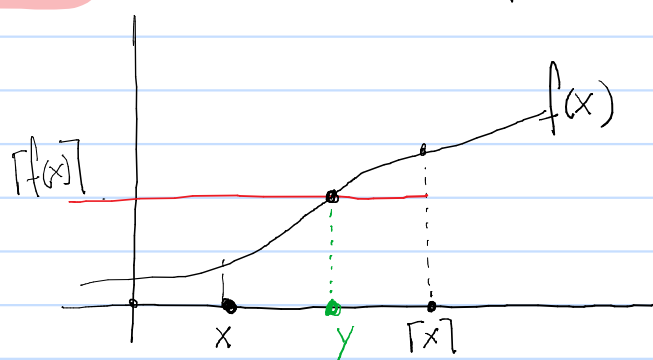
$$\text{ENTÃO TEMOS } \lfloor f(x) \rfloor = \lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor \quad \text{E} \quad \lceil f(x) \rceil = \lceil f(\lceil x \rceil) \rceil$$

PROVA (PARA TETO): SE $x = \lceil x \rceil$, ENTÃO NÃO HÁ O QUE PROVAR

ENTÃO PODEMOS SUPOR QUE $x < \lceil x \rceil$. ISSO IMPLICA QUE $f(x) < f(\lceil x \rceil)$.

LOGO, TEMOS $\lceil f(x) \rceil < \lceil f(\lceil x \rceil) \rceil$.

SE $\lceil f(x) \rceil < \lceil f(\lceil x \rceil) \rceil$, ENTÃO EXISTE y COM $x < y < \lceil x \rceil$ T.q. $f(y) = \lceil f(x) \rceil$



PELA CONTINUIDADE DE f

PELA PROPRIEDADE ESPECIAL (*), TEMOS QUE $y \in \mathbb{Z}$, UM ABSURDO.

$$\text{LOGO } \lceil f(x) \rceil = \lceil f(\lceil x \rceil) \rceil$$

$$\text{EX: } f(x) = \left\lfloor \frac{x+m}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor + m}{n} \right\rfloor \quad \text{E} \quad f(x) = \left\lceil \frac{x+m}{n} \right\rceil = \left\lceil \frac{\lceil x \rceil + m}{n} \right\rceil, \quad m, n \in \mathbb{Z} \quad n > 0$$

$$\text{EX: } \left\lfloor \left\lfloor \frac{x}{10} \right\rfloor / 10 \right\rfloor = \left\lfloor x / 1000 \right\rfloor$$

• E QUANTO $\lceil \sqrt{\lfloor x \rfloor} \rceil = \lceil \sqrt{x} \rceil$?

$$\text{FALSO PARA } x = \phi = 1.61803399 : \begin{cases} \sqrt{\phi} = 1.2720, \lceil \sqrt{\phi} \rceil = 2 \\ \lfloor \phi \rfloor = 1, \lceil \sqrt{\lfloor \phi \rfloor} \rceil = 1 \end{cases}$$

PERGUNTA: QUE CONDIÇÃO É NECESSÁRIA PARA QUE $\lceil \sqrt{\lfloor x \rfloor} \rceil = \lceil \sqrt{x} \rceil$?

$$\text{RESP: QUANDO } m^2 + 1 \leq x \leq (m+1)^2$$

OU: x É INTEIRO OU $\sqrt{\lfloor x \rfloor}$ NÃO É INTEIRO

INTERVALOS

~> INT. FECHADO: $[a..b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$

~> INT. ABERTO: $(a..b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$

~> INT. SEMI-ABERTOS: $(a..b]$, $[a..b)$ ANALOGAMENTE.

PERGUNTA: QUANTOS INTEIROS ESTÃO CONTIDOS EM TALS INTERVALOS

NOTE QUE $[a..b) \cup [b..c) = [a..c)$

MAS $(a..b) \cup (b..c) = (a..c) \setminus \{b\}$

E $[a..b] \cup [b..c] = [a..c]$, MAS b APARECE DUAS VEZES

RESPOSTA: SE $a, b \in \mathbb{Z}$, ENTÃO $[a..b)$ CONTÉM $b-a$ INTEIROS

SE $a, b \in \mathbb{R}$, E $m \in \mathbb{Z}$, TEMOS

$$a \leq m < b \quad \Leftrightarrow \quad \lceil a \rceil \leq m < \lceil b \rceil$$

$$a < m \leq b \quad \Leftrightarrow \quad \lfloor a \rfloor < m \leq \lfloor b \rfloor$$

LOGO, O INTERVALO $[a..b)$ CONTÉM $\lceil b \rceil - \lceil a \rceil$ INTEIROS E O INTERVALO $(a..b]$ CONTÉM $\lfloor b \rfloor - \lfloor a \rfloor$ INTEIROS.

DE FORMA SEMELHANTE, O INTERVALO $[a..b]$ POSSUI $\lfloor b \rfloor - \lfloor a \rfloor + 1$ INTEIROS E O INTERVALO $(a..b)$ POSSUI $\lceil b \rceil - \lceil a \rceil - 1$ INTEIROS

PROBLEMA: QUANTOS NÚMEROS n ENTRE 1 E 1000000 SÃO DIVISÍVEIS POR $\lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor$?

EX: SE n É T.q. $1 \leq n \leq 7$, TEMOS $\sqrt[3]{n} < 2$ E $\lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor = 1$

SE n ESTÁ ENTRE 8 E 26 TEMOS $\sqrt[3]{n} < 3$ E $\lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor = 2$
ENTÃO CONTAMOS TODOS OS PARES.

SE n ESTÁ ENTRE 3^3 E $4^3 - 1$ TEMOS $\sqrt[3]{n} = 3$
ENTÃO CONTAMOS APENAS OS MÚLTIPLOS DE 3.

SEJA V A QUANTIDADE DE NÚMEROS n ENTRE 1 E 10^6 QUE SÃO DIVISÍVEIS POR $\lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor$. TEMOS

$$V = \sum_{n=1}^{10^6} [n \text{ É DIVISÍVEL POR } \lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor]$$

$$= \sum_{k, m} [k = \lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor] [k \mid m] [1 \leq m \leq 10^6]$$

$$= \sum_{k, m, m} [k^3 \leq m < (k+1)^3] [m = km] [1 \leq m \leq 10^6]$$

POR CUSA
DO 10^6

$$= 1 + \sum_{k, m} [k^3 \leq km < (k+1)^3] [1 \leq k \leq 10^2]$$

$$= 1 + \sum_{k, m} [m \in [k^2, (k+1)^3/k]] [1 \leq k \leq 10^2]$$

INTERVALO
SEMI-ABERTO

$$= 1 + \sum_{1 \leq k \leq 100} \left(\left\lceil k^2 + 3k + 3 + \frac{1}{k} \right\rceil - \lceil k^2 \rceil \right)$$

$$= 1 + \sum_{1 \leq k \leq 100} (3k + 4)$$

$$= 1 + 4 \cdot 100 + 3 \frac{101 \cdot 100}{2}$$

GENERALIZANDO PARA NÚMEROS DE 1 A N , COLOCAMOS $K = \lfloor \sqrt[3]{N} \rfloor$ E TEMOS

$$V = \sum_{1 \leq k \leq K} (3k + 4) + \sum_m [k^3 \leq km \leq N]$$

$$= \frac{1}{2} (7 + 3K + 1)(K - 1) + \sum_m [m \in [k^2, N/k]]$$

O QUE NOS DÁ $V = \lfloor N/K \rfloor + \frac{1}{2} K^2 + \frac{5}{2} K - 3$, COM $K = \lfloor \sqrt[3]{N} \rfloor$

QUANDO N É GRANDE, TEMOS $V = \frac{3}{2} N^{2/3} + O(N^{1/3})$

ESPECTRO

- O ESPECTRO DE UM NÚMERO REAL α É O MULTICONJUNTO

$$\text{SPEC}(\alpha) = \{ \lfloor \alpha \rfloor, \lfloor 2\alpha \rfloor, \lfloor 3\alpha \rfloor, \dots \}$$

UM CONJUNTO QUE PERMITE VÁRIAS CÓPIAS DO MESMO ELEMENTO

$$\text{EX: SPEC}(1/2) = \{0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, \dots\}$$

NOTE QUE SE $\alpha \neq \beta$, ENTÃO $\text{SPEC}(\alpha) \neq \text{SPEC}(\beta)$ POIS SE $\beta > \alpha$, ENTÃO EXISTE INTEIRO m T.q.

$$m(\beta - \alpha) \geq 1 \quad (\text{TOME } m \geq \lceil 1/\beta\alpha \rceil)$$

ENTÃO TEMOS $m\beta \geq m\alpha + 1$ E, PORTANTO, $\lfloor m\beta \rfloor > \lfloor m\alpha \rfloor$.

COMPAREMOS OS ESPECTROS $\text{SPEC}(\sqrt{2})$ E $\text{SPEC}(2+\sqrt{2})$

$$\text{SPEC}(\sqrt{2}) = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 14, \dots\}$$

$$\text{SPEC}(2+\sqrt{2}) = \{3, 6, 10, 13, 17, 20, 23, 27, 30, 34, \dots\}$$

- NOTE QUE O n -ÉSIMO TERMO DE $\text{SPEC}(2+\sqrt{2})$ É IGUAL AO n -ÉSIMO TERMO DE $\text{SPEC}(\sqrt{2})$ MAIS $2n$.

- MAIS DO QUE ISSO: APARENTEMENTE CADA NÚMERO INTEIRO APARECE EM EXATAMENTE UM DESSES CONJUNTOS.

DIREMOS QUE $\text{SPEC}(\sqrt{2})$ E $\text{SPEC}(2+\sqrt{2})$ PARTICIONAM OS INTEIROS.

ISSO É $\text{SPEC}(\sqrt{2}) \cap \text{SPEC}(2+\sqrt{2}) = \emptyset$ E

$$\text{SPEC}(\sqrt{2}) \cup \text{SPEC}(2+\sqrt{2}) = \{1, 2, 3, \dots\}$$

PROVA: VAMOS CONTAR O NÚMERO DE ELEMENTOS $\leq n$ NESTES CONJUNTOS SEJA $\alpha > 0$. O NÚMERO DE ELEMENTOS $\leq n$ EM $\text{SPEC}(\alpha)$ É

$$\begin{aligned} N(\alpha, n) &= \sum_{k>0} [\lfloor k\alpha \rfloor \leq n] = \sum_{k>0} [\lfloor k\alpha \rfloor < n+1] = \sum_{k>0} [k\alpha < n+1] \\ &= \sum_k [0 < k < \frac{(n+1)}{\alpha}] = \left\lceil \frac{(n+1)}{\alpha} \right\rceil - 1 \end{aligned}$$

Assim, temos

$$\begin{aligned}N(\sqrt{2}, n) + N(2+\sqrt{2}, n) &= \left\lfloor \frac{n+1}{\sqrt{2}} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+1}{2+\sqrt{2}} \right\rfloor - 2 \\&= \left\lfloor \frac{n+1}{\sqrt{2}} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+1}{2+\sqrt{2}} \right\rfloor \\&= \frac{n+1}{\sqrt{2}} - \left\{ \frac{n+1}{\sqrt{2}} \right\} + \frac{n+1}{2+\sqrt{2}} - \left\{ \frac{n+1}{2+\sqrt{2}} \right\} \\&= \frac{(n+1)(\sqrt{2}+2+\sqrt{2})}{\sqrt{2}(2+\sqrt{2})} - \left\{ \frac{n+1}{\sqrt{2}} \right\} - \left\{ \frac{n+1}{2+\sqrt{2}} \right\} \\&= n+1 - 1\end{aligned}$$

→ A soma das partes fracionárias de dois números é < 2 .

→ Por outro lado, $N(\sqrt{2}, n) + N(2+\sqrt{2}, n)$ tem que ser inteiro!

• Isso tudo vale por causa da igualdade

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2+\sqrt{2}} = 1$$

MOD

~* GOSTARÍAMOS DE ESTUDAR OS ELEMENTOS DA DIVISÃO INTEIRA

~* DIVIDIR n POR m SIGNIFICA ENCONTRAR $q, r \in \mathbb{N}$ TALS QUE

$$n = q \cdot m + r \quad \text{e} \quad 0 \leq r < m$$

• TEMOS QUE $q = \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor$, QUEREMOS UMA NOTAÇÃO PARA r , O RESTO DA DIVISÃO

~* DENOTAMOS POR $n \text{ MOD } m$

• Assim, temos
$$n = m \underbrace{\left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor}_{\text{QUOCIENTE}} + \underbrace{n \text{ MOD } m}_{\text{RESTO}}$$

• Em particular, temos
$$n \text{ MOD } m = n - m \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor$$

• Podemos generalizar essa definição para números negativos.

$$5 \text{ MOD } 3 = 5 - 3 \left\lfloor \frac{5}{3} \right\rfloor = 2$$

$$5 \text{ MOD } -3 = 5 + 3 \left\lfloor \frac{5}{-3} \right\rfloor = -1$$

$$-5 \text{ MOD } 3 = -5 - 3 \left\lfloor \frac{-5}{3} \right\rfloor = 1$$

$$-5 \text{ MOD } -3 = -5 + 3 \left\lfloor \frac{-5}{-3} \right\rfloor = -2$$

Assim, temos

$$0 \leq x \bmod y < y, \text{ para } y > 0$$

$$0 \geq x \bmod y > y, \text{ para } y < 0$$

• Por completeza definimos $x \bmod 0 = x$

• Lembre-se que definimos a parte fracionária de x pela fórmula

$$x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$$

→ Também podemos escrevê-la como $x \bmod 1$.

• Distributividade: $c(x \bmod y) = (cx) \bmod (cy)$

$$\text{Prova: } c(x \bmod y) = c(x - y \lfloor x/y \rfloor)$$

$$= (cx) - (cy) \lfloor x/y \rfloor = (cx) - (cy) \lfloor cx/cy \rfloor = (cx) \bmod (cy)$$

PERGUNTA: COMO DISTRIBUIR n ELEMENTOS EM m CAIXAS DE FORMA QUE A DIFERENÇA ENTRE O NÚMERO DE ELEMENTOS DE CADA CAIXA SEJA NO MÁXIMO 1.

→ Colocamos $\lceil n/m \rceil$ ELEMENTOS EM $n \bmod m$ CAIXAS E $\lfloor n/m \rfloor$ ELEMENTOS NAS $m - n \bmod m$ CAIXAS RESTANTES.

→ Podemos escrever uma fórmula fechada para o número de elementos c_k na k -ésima caixa?

NÃO É DIFÍCIL VERIFICAR QUE $c_k = \left\lceil \frac{n-k+1}{m} \right\rceil$

→ Isso nos dá a fórmula

$$\begin{aligned} n &= \left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil + \left\lceil \frac{n-1}{m} \right\rceil + \dots + \left\lceil \frac{n-m+1}{m} \right\rceil = \sum_{k=1}^m \left\lceil \frac{n-k+1}{m} \right\rceil \\ &= \left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil + \left\lceil \frac{n+1}{m} \right\rceil + \dots + \left\lceil \frac{n+m-1}{m} \right\rceil = \sum_{k=1}^m \left\lceil \frac{n+k-1}{m} \right\rceil \end{aligned}$$

→ Em particular, temos $n = \lceil n/2 \rceil + \lfloor n/2 \rfloor$

$$\text{Se } n = \lfloor mx \rfloor, \text{ temos } \lfloor mx \rfloor = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{m} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor x + \frac{m-1}{m} \right\rfloor$$

SOMAS ENVOLVENDO PISOS E TETOS

EX: $\sum_{0 \leq k \leq n} \lfloor \sqrt{k} \rfloor$

IDEIA: INTRODUZIR UMA VARIÁVEL

$$\sum_{0 \leq k \leq n} \lfloor \sqrt{k} \rfloor = \sum_{k, m \geq 0} m [k \leq n] [m = \sqrt{k}]$$

$$= \sum_{k, m \geq 0} m [k \leq n] [m \leq \sqrt{k} < m+1]$$

$$= \sum_{k, m \geq 0} m [k \leq n] [m^2 \leq k < (m+1)^2]$$

$$= \sum_{k, m \geq 0} m [m^2 \leq k < (m+1)^2 \leq n]$$

$$+ \sum_{k, m \geq 0} m [m^2 \leq k < n < (m+1)^2]$$

A CONDIÇÃO DE CONTORNO É DELICADA

SUPONHA QUE $n = a^2$ COM $a \in \mathbb{Z}$.

NESTE CASO O SEGUNDO SOMATÓRIO SE ANULA.

TEMOS

$$\sum_{k, m \geq 0} m [m^2 \leq k < (m+1)^2 \leq a^2]$$

A QUANTIDADE DE VEZES QUE m APARECE.

$$= \sum_{m \geq 0} m ((m+1)^2 - m^2) [m+1 \leq a]$$

$$= \sum_{m \geq 0} m(2m+1) [m < a]$$

$$\begin{aligned} m(2m+1) &= 2m^2 + m \\ &= 2m^2 - 2m + 3m \\ &= 2m(m-1) + 3m \\ &= 2m^2 + 3m \end{aligned}$$

$$= \sum_{0 \leq m < a} (2m^2 + 3m)$$

$$= \sum_{m=0}^{a-1} (2m^2 + 3m) = \left. \frac{2}{3}m^3 + \frac{3}{2}m^2 \right|_0^a$$

$$= \frac{1}{6}(4a+1)a(a-1)$$

No caso geral podemos tomar $a = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ e temos

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq k \leq n} \lfloor \sqrt{k} \rfloor &= \sum_{k, m \geq 0} m \left[m^2 \leq k < (m+1)^2 \leq a^2 \right] \\ &\quad + \sum_{k, m \geq 0} m \left[m^2 \leq k < a^2 < (m+1)^2 \right] \\ &\quad + \sum_{k, m \geq 0} a \left[a^2 \leq k < n \right] \end{aligned}$$

- O primeiro somatório fica igual: $\frac{1}{6}(4a+1)a(a-1)$
- O segundo somatório continua zero pois m^2 e $(m+1)^2$ são quadrados consecutivos
- O terceiro somatório lida com os termos entre $\lfloor \sqrt{n} \rfloor^2$ e n . Neste caso temos $\lfloor \sqrt{k} \rfloor = \lfloor \sqrt{n} \rfloor = a$

Assim, temos

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq k \leq n} \lfloor \sqrt{k} \rfloor &= \frac{1}{6}(4a+1)a(a-1) + a(n-a^2) \\ &= n \cdot a - \frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{6}a \quad a = \lfloor \sqrt{n} \rfloor \end{aligned}$$

Outra forma de resolver este problema ^{no caso $n = a^2$} é trocar $\lfloor x \rfloor$ por $\sum_j [1 \leq j \leq x]$.

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq k \leq n} \lfloor \sqrt{k} \rfloor &= \sum_{0 \leq k \leq n} \sum_j [1 \leq j \leq \sqrt{k}] = \sum_{j, k} [1 \leq j \leq \sqrt{k}] [0 \leq k < a^2] \\ &= \sum_{1 \leq j < a} \sum_k [j^2 \leq k < a^2] \\ &= \sum_{1 \leq j < a} (a^2 - j^2) = a^3 - \frac{1}{3}a(a + \frac{1}{2})(a+1) \end{aligned}$$

EX: $\sum_{0 \leq k < m} \left\lfloor \frac{mk+x}{m} \right\rfloor$ com $n, m \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$ e $m > 0$

VAMOS ANALISAR CASOS PEQUENOS DE m E n

• QUANDO $m=0$ TEMOS $\left\lfloor \frac{x}{m} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{m} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{x}{m} \right\rfloor = m \left\lfloor \frac{x}{m} \right\rfloor$

• QUANDO $m=1$, TEMOS

$$\left\lfloor \frac{x}{m} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1+x}{m} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{m-1+x}{m} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$$

BASTA APLICARMOS A FÓRMULA JÁ VISTA

$$\lfloor mx \rfloor = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{m} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor x + \frac{m-1}{m} \right\rfloor$$

COM x/m NO LUGAR DE x .

• QUANDO $m=1$ TEMOS APENAS UM TERMO: $\lfloor x \rfloor$

• QUANDO $m=2$ TEMOS DOIS CASOS, DEPENDENDO DA PARIDADE DE m

$\leadsto m$ PAR: $\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{2} + \frac{m}{2} \right\rfloor = 2 \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \frac{m}{2}$

$\leadsto m$ ÍMPAR, ENTÃO $\frac{m-1}{2}$ É INTEIRO E TEMOS

$$\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+m}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} + \frac{m-1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor + \frac{m-1}{2} = \lfloor x \rfloor + \frac{m-1}{2}$$

$\leadsto$ PÁG 9 COM $m=2$

• QUANDO $m=3$ TEMOS $\left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+m}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+2m}{3} \right\rfloor$.

$\leadsto$ SE $m \bmod 3 = 0$, ENTÃO $m/3$ E $2m/3$ SÃO INTEIROS. LOGO,

$$= 3 \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor + m$$

$\leadsto$ SE $m \bmod 3 = 1$, ENTÃO $(m-1)/3$ E $2(m-1)/3$ SÃO INTEIROS

$$= \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{3} \right\rfloor + \frac{m-1}{3} + \left\lfloor \frac{x+2}{3} \right\rfloor + \frac{2(m-1)}{3} = \lfloor x \rfloor + m - 1$$

$\leadsto m \bmod 3 = 0$

$\leadsto$ SE $m \bmod 3 = 2$, ENTÃO $\left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+2}{3} \right\rfloor + \frac{m-2}{3} + \left\lfloor \frac{x+1}{3} \right\rfloor + \frac{2m-1}{3} = \lfloor x \rfloor + m - 1$

- QUANDO $m = 4$ TEMOS

$$\leadsto m \bmod 4 = 0 \Rightarrow 4 \left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor + \frac{3m}{2}$$

$$\leadsto m \bmod 4 = 1 \text{ ou } 3 \Rightarrow \left\lfloor x \right\rfloor + \frac{3m}{2} - \frac{3}{2}$$

$$\leadsto m \bmod 4 = 2 :$$

$$\begin{aligned} \left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+2}{4} \right\rfloor + \frac{m-2}{4} &+ \left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor + \frac{2m}{4} + \left\lfloor \frac{x+2}{4} \right\rfloor + \frac{3m-2}{4} \\ &= 2 \left(\left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+2}{4} \right\rfloor \right) + \frac{3m}{2} - 1 \\ &= 2 \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \frac{3m}{2} - 1 \end{aligned}$$

- APARENTEMENTE ESTAMOS OBTENDO ALGO COMO $a \left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor + bm + c$

$$\leadsto \text{COM } b = \frac{m-1}{2} \quad \text{E} \quad a = \text{MDC}(m, m)$$

↳ MÁXIMO DIVISOR COMUM

- ATÉ AGORA USAMOS A SEGUINTE IGUALDADE

$$\left\lfloor \frac{x + km}{m} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x + km \bmod m}{m} \right\rfloor + \frac{km}{m} - \frac{km \bmod m}{m}$$

PORQUE $km - k(m \bmod m) = k(m - (m \bmod m))$ É DIVISÍVEL POR m .

ENTÃO A SOMA PODE SER REESCRITA COMO

$$\sum_{0 \leq k < m} \left\lfloor \frac{x + km}{m} \right\rfloor = \sum_{0 \leq k < m} \left\lfloor \frac{x + km \bmod m}{m} \right\rfloor + \sum_{0 \leq k < m} \frac{km}{m} - \sum_{0 \leq k < m} \frac{km \bmod m}{m}$$

- PRECISAMOS ESTUDAR A SEQUÊNCIA

$$0 \bmod m, m \bmod m, 2m \bmod m, \dots$$

- VEREMOS QUE SE $d = \text{MDC}(m, m)$ ENTÃO ESTA SEQUÊNCIA CONTÉM OS NÚMEROS $0, d, 2d, \dots, m-d$ EM ALGUMA ORDEM, E ESTA ORDEM É REPETIDA d VEZES.

$$\text{Logo, } a = d \left(\left\lfloor \frac{x}{m} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+d}{m} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{x+m-d}{m} \right\rfloor \right)$$

NOVAMENTE A
FÓRMULA DA PÁG 9.

$$= d \left(\left\lfloor \frac{x/d}{m/d} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x/d + 1}{m/d} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{x/d + m/d - 1}{m} \right\rfloor \right) = d \left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor$$

Além disso, temos

$$C = d \cdot \sum_{0 \leq k < m/d} \frac{k \cdot d}{m} = d \cdot \frac{m}{d} \cdot \frac{m-d}{m} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(m-d)$$

Finalmente, temos

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq k < m} \left\lfloor \frac{x+km}{m} \right\rfloor &= d \left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor + \frac{m-1}{2} \cdot m + \frac{d-m}{2}, \text{ com } d = \text{MDC}(m, m) \\ &= d \left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor + \frac{mm+d}{2} - \frac{m+m}{2} \end{aligned}$$

~ OBSERVE QUE ESTA SOMA É SIMÉTRICA COM RESPEITO A m E m !

$$\text{ISTO É : } \underbrace{\sum_{0 \leq k < m} \left\lfloor \frac{x+km}{m} \right\rfloor}_{m \text{ TERMOS}} = \underbrace{\sum_{0 \leq k < m} \left\lfloor \frac{x+km}{m} \right\rfloor}_{m \text{ TERMOS}}$$