

PROBABILIDADE DISCRETA

Ω = ESPAÇO DE PROBABILIDADE

CONJUNTO DE TUDO QUE PODE ACONTECER

$Pr(w)$ é a PROBABILIDADE DE $w \in \Omega$

• TEMOS QUE $\sum_{w \in \Omega} Pr(w) = 1 \leadsto$ ALGUMA COISA TEM QUE ACONTECER

• $0 \leq Pr(w) \leq 1$

Pr é uma DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADE

EX: PAR DE DADOS $D^2 = \{\square\square, \square\square, \dots, \square\square\}$

ONDE $D = \{\square, \dots, \square\}$

NESTE CASO ASSUMIMOS QUE $\square\square \neq \square\square$

O ESP. DE PROB TEM 36 EVENTOS

SE OS DADOS SÃO HONESTOS TEMOS QUE A PROBABILIDADE DE CADA JOGADA É $1/36$.

$\leadsto$ MAS PODEMOS TER DADOS VICIADOS

EX: $Pr_1(1) = Pr_1(6) = 1/4$, $Pr_1(2) = Pr_1(3) = Pr_1(4) = Pr_1(5) = 1/8$

NESTE CASO, TEMOS $Pr_1(d, d') = Pr_1(d) \cdot Pr_1(d')$

• TAMBÉM PODEMOS TER DADOS DIFERENTES

- Um **EVENTO** É UM SUBCONJUNTO DE Ω

EX: SAÍRAM DADOS IGUAIS

- A PROBABILIDADE DE UM EVENTO $A \subseteq \Omega$

$$\Pr(A) = \sum_{\omega \in A} \Pr(\omega)$$

→ EM GERAL UM EVENTO É DADO POR UMA PROPRIEDADE QUE OS ELEMENTOS DE Ω PODEM OU NÃO TER.

- Uma **VARIÁVEL ALEATÓRIA** É UMA FUNÇÃO DEFINIDA EM Ω

EX: SE $\Omega = D^2$ (DOS DADOS)

PODEMOS DEFINIR $S: \Omega \rightarrow \mathbb{N}$ COMO A SOMA DOS DADOS. $S(\begin{smallmatrix} \square & \square \\ 1 & 4 \end{smallmatrix}) = 5$.

PODEMOS PERGUNTAR ENTÃO A PROBABILIDADE DE $S(\omega) = 7$

$$\Pr(S = 7)$$

O EVENTO $S = 7 = \{ \begin{smallmatrix} \square & \square \\ 1 & 6 \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} \square & \square \\ 2 & 5 \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} \square & \square \\ 3 & 4 \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} \square & \square \\ 4 & 3 \end{smallmatrix}, \dots \}$

- Uma **VARIÁVEL ALEATÓRIA** PODE SER CARACTERIZADA PELA DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADE DE SEUS VALORES.
- ENTÃO PODEMOS TRABALHAR COM O ESPAÇO DE PROBABILIDADE DOS VALORES DA VARIÁVEL.

→ E IGNORAR O ESPAÇO DE PROBABILIDADE ORIGINAL.

- Se duas variáveis aleatórias estão definidas no mesmo espaço, podemos estudar a "distribuição conjunta"

$$Pr(X=x \text{ e } Y=y)$$

- Dizemos que X e Y são independentes se

$$P_R(X=x \text{ \& } Y=y) = P_R(X=x)P_R(Y=y)$$

PARA TODOS $x \in Y$

→ O valor DE UMA VARIÁVEL NÃO AFETA O DA OUTRA.

EX: $\Omega = \mathbb{D}^2$, $s_1 = \text{valor do primeiro dado}$
 $s_2 = \text{valor do segundo dado}$

→ SÃO INDEPENDENTES

EX: $S = S_1 + S_2 \quad \& \quad P = S_1 \cdot S_2$

$\Pr(S=2) = 1/36$ $\Pr(P=2) = 1/18$
 so $\downarrow$ QUANDO 11 QUANDO 12 E 21

$$P_R(S=2 \in P=2) = 0$$

• Qual o valor médio de uma sequência?

- MÉDIA = SOMA DE TODOS OS VALORES / NÚMERO DE VALORES
- MEDIANA = O VALOR DO MEIO
- MODA = O VALOR MAIS FREQUENTE

EX: (3, 1, 4, 1, 5)

$$\text{MÉDIA} = (3+1+4+1+5)/5 = 2,8$$

$$\text{MEDIANA} = 3$$

$$\text{MODA} = 1$$

- É DE UMA VARIÁVEL ALEATÓRIA?

$$\text{- MÉDIA} = \sum_{x \in X(\Omega)} x \cdot \Pr(X=x)$$

$X(\Omega)$ = CONS. DOS VALORES QUE X PODE ASSUMIR.

- MEDIANA = CONJUNTO DOS x T.q.

$$\Pr(X \leq x) \geq \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \Pr(X \geq x) \geq \frac{1}{2}$$

- MODA = CONJUNTO DOS x T.q.

$$\Pr(X=x) \geq \Pr(X=x') \quad \text{PARA TODO } x' \in X(\Omega)$$

• A MÉDIA TAMBÉM É CONHECIDA COMO ESPERANÇA

$$EX = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot \Pr(\omega)$$

$$= \sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ x \in X(\Omega)}} x \cdot \Pr(\omega) [x = X(\omega)]$$

SE X E Y SÃO DUAS VARIÁVEIS EM Ω

$$E(X+Y) = \sum_{\omega \in \Omega} (X(\omega) + Y(\omega)) P_R(\omega) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P_R + \sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega) P_R(\omega) \\ = EX + EY$$

ANALOGAMENTE

$$E(\alpha X) = \sum_{\omega \in \Omega} \alpha X(\omega) P_R(\omega) = \alpha EX$$

PARA MULTIPLICAÇÃO É MAIS COMPLICADO

→ SE X E Y SÃO IND. ENTÃO

$$E(X \cdot Y) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) Y(\omega) \cdot P_R(\omega) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega)}} xy P_R(X=x \text{ e } Y=y) \\ = \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} xy P_R(X=x) P_R(Y=y) \\ = \sum_{x \in X(\Omega)} x P_R(X=x) \sum_{y \in Y(\Omega)} P_R(Y=y) = EX EY$$

MÉDIA E VARIÂNCIA

- PROPRIEDADE MAIS IMPORTANTE DE UMA VARIÁVEL ALEATÓRIA, DEPOIS DA ESPERANÇA

$$VX = E((X - EX)^2)$$

→ O DESVIO MÉDIO QUADRÁTICO DA MÉDIA

→ SE $\mu = EX$, A VARIÂNCIA É A ESPERANÇA DE $(X - \mu)^2$

EX: UM DE CEM BILHETES É ESCOLHIDO (UNIF.) AO ACASO

SÃO DOIS ROUNDS. TEMOS DUAS OPÇÕES

- a) ESCOLHER DOIS BILHETES P/ O MESMO SORTEIO
- b) ESCOLHER UM BILHETE P/ CADA SORTEIO

A ESPERANÇA DE CADA BILHETE É

$$EX_i = \frac{99}{100} \cdot 0 + \frac{1}{100} \cdot 1 = \frac{1}{100}$$

↙ i-ÉSIMO BILHETE ↘ VALOR DO PRÊMIO

COMO ESPERANÇAS SÃO ADITIVAS

$$E(X_1 + X_2) = EX_1 + EX_2 = 2/100$$

NAS QUAIS A DIFERENÇA ENTRE OS DOIS SORTEIOS?

	0	1	2
a)	$98/100$	$2/100$	
b)	$(99/100)^2$	$198/100^2$	$(1/100)^2$

NOTE QUE $\left(\frac{99}{100}\right)^2 > \frac{98}{100}$

→ A DISTRIBUIÇÃO DE $X_1 + X_2$ EM b É MAIS DISPERSA

→ ISSO É CAPTURADO PELA VARIÂNCIA

NO PRIMEIRO CASO, TEMOS

$$0.98 \left(0 - \frac{2}{100}\right)^2 + 0.02 \left(1 - \frac{2}{100}\right)^2 = 196/100^2$$

NO SEGUNDO CASO

$$0.9801 \left(0 - \frac{2}{100}\right)^2 + 0.0198 \left(1 - \frac{2}{100}\right)^2 + \frac{1}{100^2} \left(2 - \frac{2}{100}\right)^2 = 198/100^2$$

→ O QUADRADO NA VARIÂNCIA AJUDA A FACILITAR AS CONTAS

DE LÁ OBTÉMOS O DESVIO PADRÃO

$$\sigma = \sqrt{VX}$$

* NO NOSSO CASO, TEMOS

$$\sigma_a = \sqrt{196/100^2} = 14/100, \quad \sigma_b = \sqrt{198/100^2} = 14.07/100$$

- Como a VARIÂNCIA AJUDA A ESCOLHER ENTRE a e b?

→ MAIOR VARIÂNCIA : MAIOR RISCO, MAIOR GANHO

- Há uma forma mais fácil de calcular a VARIÂNCIA:

$$\begin{aligned} V(X) &= E((X - EX)^2) = E(X^2 - 2XEX + (EX)^2) \\ &= E(X^2) - 2EXEX + (EX)^2 \\ &= E(X^2) - (EX)^2 \end{aligned}$$

→ Pois EX é uma constante

EX : As médias de $(X_1 + X_2)^2 = 0.98 \cdot 0^2 + 0.02 \cdot 1^2 = 2/100$

$$E(X_1 + X_2)^2 = 0.9801 \cdot 0^2 + \frac{198}{100} \cdot 1^2 + \frac{1}{100} \cdot 2 = \frac{2.02}{100}$$

O quadrado da média é $(2/100)^2 = 4/100^2$

Assim, obtemos $196/100^2$ e $198/100^2$

- Há ainda outra fórmula para calcular $V(X+Y)$ quando X e Y são independentes:

$$E((X+Y)^2) = E(X^2 + 2XY + Y^2) = E(X^2) + \underbrace{2EXEY}_{\substack{\text{Pois } EXY = EXEY \\ \text{No caso ind.}}} + E(Y^2)$$

Logo, $V(X+Y) = E((X+Y)^2) - (EX + EY)^2$

$$\begin{aligned} &= E(X^2) + \cancel{2EXEY} + E(Y^2) - (EX)^2 - \cancel{2EXEY} - (EY)^2 \\ &= V(X) + V(Y) \end{aligned}$$

EX: DOIS SORTEIOS DIFERENTES

EX: S É A SOMA DE DOIS DADOS S_1, S_2

$$V_{S_1} = V_{S_2} = \frac{1}{6} (1^2 + 2^2 + \dots + 6^2) - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12}$$

$$\text{E } V_S = 35/6$$

SE OS DADOS SÃO VICIADOS (1 E 6 SAEM COM O DOBRO DE CHANCE)

$$V_{S_1} = \frac{1}{8} (2 \cdot 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 2 \cdot 6^2) - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{45}{12}$$

$$\text{E } V_S = 45/6$$

PERGUNTA: PRA QUE SERVE A VARIÂNCIA?

DESIGUALDADE DE CHEBYSHEV:

$$\Pr((X - EX)^2 \geq \alpha) \leq \frac{VX}{\alpha} \quad \alpha > 0$$

→ UMA VARIÁVEL ALEATÓRIA FICA RARAMENTE LONGE DE SUA MÉDIA.

PROVA: $VX = \sum_{\omega \in \Omega} (X(\omega) - EX)^2 \Pr(\omega)$

$$\geq \sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ (X(\omega) - EX)^2 \geq \alpha}} (X(\omega) - EX)^2 \Pr(\omega)$$

$$\geq \sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ (X(\omega) - EX)^2 \geq \alpha}} \alpha \Pr(\omega) = \alpha \Pr((X(\omega) - EX)^2 \geq \alpha)$$

~> Colocando $\mu = EX$, $\sigma = \sqrt{VX}$, e $\alpha = c^2 VX$, temos

$$\Pr(|X - \mu| \geq c\sigma) \leq \frac{1}{c^2}$$

~> calculamos a distância em termos do desvio padrão

~> Uma var aleat. dista menos de 2σ de μ com probabilidade maior que 75%.

~> Uma var aleat. fica dentro de $(\mu - 10\sigma, \mu + 10\sigma)$ em mais de 99% dos casos.

EX: SE JOGARMOS UM PAR DE DADOS HONESTES n VEZES, TEMOS

$$X = X_1 + \dots + X_n, \quad EX = 7n$$

$$\Rightarrow VX = VX_1 + \dots + VX_n = \frac{35}{6}n$$

$$\text{Logo, } \sigma = \sqrt{VX} = \sqrt{\frac{35}{6}n}$$

ie des. de CHEBYSHEV, X CAI DENTRO DE

$$(7n - 10\sqrt{\frac{35}{6}n}, 7n + 10\sqrt{\frac{35}{6}n})$$

EM 99% DOS CASOS.

COMO USAMOS A DESIGUALDADE DE CHERBYCHEV?

- SEJA X UMA VARIÁVEL ALEATÓRIA NO ESPAÇO Ω COM MÉDIO μ E DESVIO PADRÃO σ .

CONSIDERE O ESPAÇO Ω^n DAS SEQUÊNCIAS DE EVENTOS ELEMENTARES

$$(w_1, \dots, w_n), \text{ com } w_k \in \Omega$$

PARA $k \in \{1, \dots, n\}$, SEJA $X_k: \Omega^n \rightarrow \mathbb{R}$ A VAR. ALEATÓRIA T.q.

$$X_k(w_1, \dots, w_n) = X(w_k)$$

E DEFINA $X' = X_1 + \dots + X_n$, QUE É UMA SOMA DE VARS. A. INDS.

$\Rightarrow$ É COMO TOMAR n AMOSTRAS INDEPENDENTES DE Ω

TEMOS $EX' = n\mu$ E O DESVIO PADRÃO

$$\sqrt{VX'} = \sqrt{\sum V X_i} = \sqrt{n\sigma^2} = \sqrt{n}\sigma$$

O VALOR MÉDIO $X^* = X'/n$ TEM DESVIO PADRÃO $\frac{\sqrt{n}\sigma}{n} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

ENTÃO X^* ESTÁ ENTRE $\mu - 10\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ E $\mu + 10\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ DURANTE 99% DAS OCASIÕES.

$$\text{NOTE QUE } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\mu - 10\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\mu + 10\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = \mu$$

ASSIM, O VALOR MÉDIO PODE ESTAR PERTO DA MÉDIA O QUANTO QUISERMOS, BASTA ESCOLHER n SUFICIENTEMENTE GRANDE

COMO ESTIMAR A MÉDIA DE UMA VARIÁVEL ALEATÓRIA?

- SE FIZERMOS m EXPERIMENTOS $X_1, \dots, X_m$, ESPERAMOS QUE A MÉDIA SEJA PRÓXIMA DE

$$\hat{E}X = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m X_i$$

NOTE QUE

$$E(\hat{E}X) = E\left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m X_i\right) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m E(X_i) = \frac{1}{m} \cdot m \cdot E(X) = EX$$

GOSTARÍAMOS DE DEFINIR $\hat{V}X$ DE TAL FORMA QUE $VX = E(\hat{V}X)$

$$\text{DEFINIMOS } \hat{V}X = \frac{X_1^2 + \dots + X_m^2}{m-1} - \frac{(X_1 + \dots + X_m)^2}{m(m-1)}$$

DE FATO,

$$E(\hat{V}X) = \frac{1}{m-1} E\left(\sum_{k=1}^m X_k^2 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m X_i X_j\right)$$

$$= \frac{1}{m-1} \left(\sum_{k=1}^m E(X_k^2) - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m E(X_i X_j) \right)$$

$$= \frac{1}{m-1} \left(\sum_{k=1}^m E(X^2) - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m (E(X)^2 [i \neq j] + E(X^2) [i = j]) \right)$$

$$= \frac{1}{m-1} \left(m E(X^2) - \frac{1}{m} (m E(X^2) + m(m-1) E(X)^2) \right)$$

$$= E(X^2) - E(X)^2$$

$$= VX$$

NA PRÁTICA, RESULTADOS EXPERIMENTAIS SOBRE UMA VARIÁVEL ALEATÓRIA X SÃO APRESENTADOS NA FORMA

$$\hat{\mu} \pm \hat{\sigma} / \sqrt{n}, \text{ ONDE } \hat{\mu} = \hat{E}X \text{ e } \hat{\sigma} = \sqrt{\hat{V}X}$$

EX: Π_n = ESPAÇO DE PROBABILIDADE DAS PERMUTAÇÕES DE $[n] = \{1, \dots, n\}$. $|\Pi_n| = n!$

SUPONHA QUE $\forall \pi \in \Pi$, TEMOS $\Pr(\pi) = 1/n!$

QUEREMOS ESTUDAR OS PONTOS FIXOS DE π

$$\hookrightarrow u \in [n] \text{ t.q. } \pi(u) = u$$

CONSIDERE A VARIÁVEL ALEATÓRIA

$$F_n(\pi) = \text{NÚMERO DE PONTOS FIXOS DE } \pi$$

$\rightarrow$ Qual o valor MÉDIO DE F_n ?

$$\bullet F_n(\pi) = F_{n,1}(\pi) + F_{n,2}(\pi) + \dots + F_{n,n}(\pi)$$

$$\text{ONDE } F_{n,k}(\pi) = [\pi(k) = k]$$

ASSIM, TEMOS

$$EF_n = EF_{n,1} + \dots + EF_{n,n}$$

NOTE QUE $EF_{n,k} = \Pr(F_{n,k} = 1)$.

ALÉM DISSO, TEMOS $\Pr(F_{n,k} = 1) = 1/n$, POIS HÁ EXATAMENTE $(n-1)!$ PERMUTAÇÕES EM Π QUE FIXAM k .

$$\text{LOGO, } EF_n = \sum_{i=1}^n 1/n = 1$$

Qual é o desvio padrão de F_m ?

As variáveis $F_{m,k}$ não são independentes

$$\begin{aligned} E(F_m^2) &= E\left(\left(\sum F_{m,k}\right)^2\right) = E\left(\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m F_{m,j} \cdot F_{m,k}\right) \\ &= \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m E(F_{m,j} \cdot F_{m,k}) \\ &= \sum E(F_{m,k}^2) + 2 \sum_{1 \leq j < k \leq m} E(F_{m,j} F_{m,k}) \end{aligned}$$

Como $F_{m,k} \in \{0,1\}$, temos $F_{m,k}^2 = F_{m,k}$

$$\text{Logo, } E(F_{m,k}^2) = E(F_{m,k}) = 1/m.$$

Para $j < k$, temos

$$\begin{aligned} E(F_{m,j} \cdot F_{m,k}) &= \Pr(j \text{ e } k \text{ são pontos fixos}) \\ &= \frac{(m-2)!}{(m-1)!} = \frac{1}{m(m-1)} \end{aligned}$$

$$\text{Logo, } E(F_m^2) = 1 + 2 \cdot \binom{m}{2} \cdot \frac{1}{m(m-1)} = 2$$

Portanto, a variância é

$$VF_m = E(F_m^2) - E(F_m)^2 = 1 \Rightarrow \sigma_{F_m} = 1$$

Assim, uma permutação aleatória possui 1 ± 1 pontos fixos.

FUNÇÕES GERADORAS DE PROBABILIDADE

- SUPONHA QUE $X: \Omega \rightarrow \mathbb{N}$, i.e., UMA VAR. AL. QUE TOMA APENAS VALORES INTEIROS NÃO-NEGATIVOS.
- A FUNÇÃO GERADORA DE PROBABILIDADE (f.g.p) DE X É

$$G_X(z) = \sum_{k \geq 0} P_R(X=k) z^k$$

NOTE QUE

$$G_X(z) = \sum_{\omega \in \Omega} P_R(\omega) \cdot z^{X(\omega)} = E(z^X)$$

→ OS COEFICIENTES DE $G_X(z)$ SÃO NÃO-NEGATIVOS E SUA SOMA É 1, OU SEJA

$$G_X(1) = 1$$

→ POR OUTRO LADO, QUALQUER SÉRIE DE POTÊNCIAS $G(z)$ COM $G(1) = 1$ É A f.g.p DE UMA VAR. ALEATÓRIA.

MÉDIA E VARIÂNCIA

$$\bullet EX = \sum_{k \geq 0} k \cdot P_R(X=k) = \sum_{k \geq 0} P_R(X=k) \cdot k \cdot z^{k-1} \Big|_{z=1} = G_X'(1)$$

$$\bullet E(X^2) = \sum k^2 P_R(X=k)$$

$$= \sum P_R(X=k) \left(k(k-1) \cdot z^{k-2} + k \cdot z^{k-1} \right) \Big|_{z=1}$$

$$= G_X''(1) + G_X'(1)$$

PORTANTO, $VX = G_X''(1) + G_X'(1) - G_X'(1)^2$

• GENERALIZAMOS PARA QUALQUER FUNÇÃO G :

$$\leadsto \text{MÉDIA}(G) = G'(1)$$

$$\leadsto \text{VAR}(G) = G''(1) + G'(1) - G'(1)^2$$

EX: DISTRIBUIÇÃO UNIFORME (DE ORDEM n): A VARIÁVEL ALEATÓRIA TOMA CADA UM DOS VALORES EM $\{0, \dots, n-1\}$ COM PROBABILIDADE $1/n$.

$$U_n(z) = \frac{1}{n} (1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1}) = \frac{1}{n} \frac{1 - z^n}{1 - z} \quad n \geq 1$$

CUIDADO COM $z=1$

$$\bullet \text{MÉDIA}(U_n) = U_n'(1) = \frac{1}{n} (1 + 2 + \dots + n-1) = \frac{n-1}{2}$$

$$\bullet U_n''(1) = \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n-1} k(k-1) = \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n-1} k^2 - k$$

$$= \frac{1}{n} \left(\frac{(n-1) \cdot n (2n-1)}{6} - \frac{n(n-1)}{2} \right)$$

$$= \frac{(n-1)(2n-1)}{6} - \frac{(n-1)}{2}$$

$$= \frac{(n-1)}{6} (2n-1 - 3) = \frac{(n-1)(n-2)}{3}$$

$$\bullet \text{VAR}(U_n) = \frac{(n-1)(n-2)}{3} + \frac{(n-1)}{2} - \frac{(n-1)^2}{4} = \frac{n^2-1}{12}$$

PRODUTOS X SOMAS

- O PRODUTO DE DUAS fgp CORRESPONDE À SOMA DE VARS. INDEPS.

SEJAM X E Y DUAS VARS. INDEPS. INTEIROS POS.

NOTE QUE $P_R(X+Y=n) = \sum P_R(X=k \text{ e } Y=n-k)$

$\stackrel{\text{IND}}{\Rightarrow} \underbrace{\sum P_R(X=k) P_R(Y=n-k)}_{\text{UMA CONVOLUÇÃO!}}$

LOGO, $G_{X+Y}(z) = G_X(z) \cdot G_Y(z)$ SE X E Y SÃO INDEPS.

EM PARTICULAR, SEJAM F E G FUNÇÕES t.g. $F(1)=G(1)=1$, E

$$H(z) = F(z) G(z)$$

FUNCIONA
PARA QUALQUER
FUNÇÃO!

NOTE QUE

$$\begin{aligned} \bullet \text{ MÉDIA}(H) &= H'(1) = F'(1) \cdot G(1) + F(1) \cdot G'(1) \\ &= F'(1) + G'(1) = \text{MÉDIA}(F) + \text{MÉDIA}(G) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \leadsto H''(1) &= F''(1) \cdot G(1) + 2 \cdot F'(1) \cdot G'(1) + F(1) \cdot G''(1) \\ &= F''(1) + 2 + G''(1) \end{aligned}$$

$$\bullet \text{VAR}(H) = H''(1) + H'(1) - H'(1)^2$$

$$\begin{aligned} &= F''(1) + \cancel{2} + G''(1) + F'(1) + G'(1) \\ &\quad - F'(1)^2 - \cancel{2 F'(1) G'(1)} - G'(1)^2 \end{aligned}$$

$$= \text{VAR}(F) + \text{VAR}(G)$$

CARA OU COROA

- JOGAR UMA MOEDA : Com Prob p sai CARA e q sai COROA.

$$p + q = 1$$

$\leadsto p = q = 1/2$: MOEDA IMPARCIAL

$\leadsto p \neq q$: MOEDA TENDENCIOSA

- A fgp do número de CARAS é

$$H(z) = q + pz$$

- JOGANDO n VEZES, O NUMERO DE CARAS OBTIDO É

$$H(z)^n = (q + pz)^n = \sum_k \binom{n}{k} p^k q^{n-k} z^k$$

$\leadsto$ **DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL** : A PROBABILIDADE DE OBTERMOS k CARAS É

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k} z^k$$

PERGUNTA: SUPONHA QUE JOGAMOS A MOEDA ATÉ CAIR CARA PELA PRIMEIRA VEZ. QUAL É A PROBABILIDADE DE PRECISARMOS JOGAR EXATAMENTE k VEZES.

EX: $k=1$ COM PROBABILIDADE p .

$k=2$ COM PROBABILIDADE qp

$\vdots$

k GERAL COM PROB. $q^{k-1}p$.

$$\text{A fgp é } pz + qpz^2 + q^2pz^3 + \dots = \frac{pz}{1-qz}$$

REPETINDO ATÉ DAR n CARAS, OBTÉMOS

$$\left(\frac{pz}{1-qz}\right)^n = p^n z^n \sum_k \binom{n+k-1}{k} (qz)^k = \sum_k \binom{k-1}{k-n} p^n q^{k-n} z^k$$

- A FUNÇÃO GERADORA DA DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL NEGATIVA É

$$\left(\frac{p}{1-qz}\right)^n = \sum_k \binom{n+k-1}{k} p^n q^k z^k$$

ESTE ESPAÇO DE PROBABILIDADE É DIFERENTE DOS ESPAÇOS QUE VIMOS ANTES. EM PARTICULAR, ELE É INFINITO.

→ CADA ELEMENTO É UMA SEQUÊNCIA FINITA DE CARAS E/OU CORAS CONTENDO PRECISAMENTE n CARAS E TERMINANDO COM CARA

→ A PROBABILIDADE DE UMA TAL SEQUÊNCIA É $p^n q^{k-n}$

→ $\begin{cases} \text{CARA: } H \rightsquigarrow \text{HEADS} \\ \text{COROA: } T \rightsquigarrow \text{TAILS} \end{cases}$

- SEJA X UMA VARIÁVEL COM fgp $H(z)^n$. SUA MÉDIA É

$$\left(H(z)^n\right)' \Big|_{z=1} = n H(z)^{n-1} \cdot H'(z) \Big|_{z=1} = n \cdot H'(1) = n \cdot p$$

A VARIÂNCIA É $n(H''(1) + H'(1) - H'(1)^2) = n(0 + p - p^2) = npq$
 $\hookrightarrow \sigma = \sqrt{npq}$

- SEJA Y UMA VARIÁVEL COM fgp BINOMIAL NEGATIVA $G(z)^n$, ONDE $G(z) = p/(1-qz)$.

$$\begin{aligned} \rightsquigarrow \text{TEMOS } G'(z) &= \frac{pq}{(1-qz)^2} \quad \text{E} \quad G''(z) = \frac{2pq^2}{(1-qz)^3} \\ G'(1) &= pq/p^2 = q/p \quad G''(1) = 2q^2/p^2 \end{aligned}$$

→ A MÉDIA E VARIÂNCIA DE Y SÃO nq/p E nq^2/p^2

EX: QUANTAS VEZES TENOS QUE JOGAR UMA MOEDA PARA OBTER CORA DUAS VEZES SEGUIDAS?

O ESPAÇO DE PROBABILIDADE SÃO AS SEQUÊNCIAS DE H'S E T'S SEM H'S CONSECUTIVOS, EXCETO OS DO FINAL

$$\Omega = \{HH, THH, TTHH, HTHH, TTTHH, THTHH, HTTHH, \dots\}$$

A PROBABILIDADE DE UMA SEQUÊNCIA DADA SE OBTÉM TROCANDO T POR q E H POR p .

$$\star P_r(HTTHH) = q^2 p^3$$

CONSIDERE O SOMATÓRIO FORMA DAS SEQUÊNCIAS

$$S = HH + THH + TTHH + HTHH + \dots$$

SE TROCAMOS H POR pz E T POR qz OBTENOS $G(z)$
NOTE QUE OS ELEMENTOS DE Ω SÃO DA FORMA

$$(T+TH)^n HH$$

ISSO É, SE $R = \sum_n (T+TH)^n$, TEMOS $S = RHH$

E A fgp DE R É $(1-T-TH)^{-1}$

LOGO,

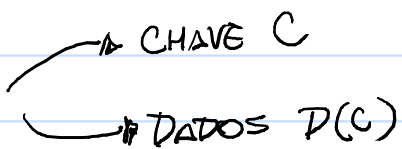
$$S = (1-T-TH)^{-1} HH \star G(z) = \frac{p^2 z^2}{1-qz-pqz^2}$$

QUE TEM MÉDIA E VARIÂNCIA

$$\mu = p^{-2} + p^{-1} \quad \text{E} \quad \sigma^2 = p^{-4} + 2p^{-3} - 2p^{-2} - p^{-1}$$

QUANDO $p=q=\frac{1}{2}$, OBTENOS $\mu=6$ E $\sigma^2=22$.

TABELAS HASH

- REGISTROS 

- GOSTARÍAMOS DE ENCONTRAR $D(C)$ RAPIDAMENTE QUANDO C É DADO

DECIDIR SE $D(C)$ ESTÁ NA LISTA
INSERIR

EX. ALUNOS X NOTAS

- MUITAS CHAVES SÃO POSSÍVEIS

→ MAS POUCAS CHAVES SÃO UTILIZADAS EM GERAL

- PODEMOS TER DUAS LISTAS: CHAVES E DADOS,
E BUSCAR O ÍNDICE DA CHAVE NA LISTA DE CHAVES

- TEMOS QUE FAZER $m+1$ PASSOS PARA ENCONTRAR O ÍNDICE DE C

IDEIA:

→ FIXE m . TEMOS m LISTAS SEPARADAS PARA GUARDAR OS DADOS

→ UMA FUNÇÃO DE DISPERSÃO $h: \{\text{CHAVES POSSÍVEIS}\} \rightarrow \{1, \dots, m\}$

→ TABELAS AUXILIARES

$\text{PRIM}[i]$ com $i \in \{1, \dots, m\}$ - APONTA PARA O PRIMEIRO REGISTRO ^{ÍNDICE?}
 $\text{PROX}[j]$ com $j \in \{1, \dots, N\}$ - APONTA PARA O REGISTRO APÓS j .

$\text{PRIM}[i] = -1$ SE A i -ÉSIMA LISTA ESTÁ VAZIA

$\text{PROX}[j] = 0$ SE j É O ÚLTIMO DA LISTA

EX: CHAVES SÃO NOMES. TEMOS QUATRO LISTAS, QUE DEPENDEM DA PRIMEIRA LETRA

$$h(\text{NOME}) = \begin{cases} 1 & \text{A-F} \\ 2 & \text{G-L} \\ 3 & \text{M-R} \\ 4 & \text{S-Z} \end{cases}$$

Alg

H1 $i = h(C)$ e $j = \text{Prim}[i]$

H2 SE $j \leq 0$ (A LISTA ESTÁ VAZIA E $D(C)$ NÃO ESTÁ NA LISTA) : FRACASSO

H3 SE $\text{CHAVE}[j] = C$, PALE: SUCESSO

H4 $j = \text{Prox}[j]$ E VOLTE P/ H2

- NO CASO DE SUCESSO, OS DADOS BUSCADOS ESTÃO EM $\text{DADOS}[j]$
- PODEMOS INCLUIR OS DADOS ATUALIZANDO AS LISTAS Prim, Prox, DADOS, CHAVE
- NOTE QUE A BUSCA FOI FEITA EM APENAS UMA LISTA.

~ SE AS LISTAS TÊM APROXIMADAMENTE O MESMO TAMANHO n/m E m É GRANDE O SUFICIENTE COM RESPEITO A n , A MELHORA É SIGNIFICATIVA.

- QUEREMOS QUE $h(C)$ FUNCIONE COMO UMA VARIÁVEL ALEATÓRIA.

~ AS LISTAS TÊM APROX. O MESMO TAMANHO.