

NOTAS DE MATEMÁTICA CONCRETA

RECORRÊNCIAS

→ A TORRE DE HANOÍ

- HÁ TRÊS PINOS E EM UM DELES HÁ UM CONJUNTO DE n DISCOS COM TAMANHOS CRESCENTES (DE BAIXO ?/ CIMA)
- GOSTARIAMOS DE TRANSFERIR A TORRE TODA PARA OUTRO PINO, MAS DEVEMOS RESPEITAR ALGUMAS REGRAS
 - CADA DISCO DEVE SER MOVIDO INDIVIDUALMENTE
 - NUNCA PODEMOS TER UM DISCO MAIOR EM CIMA DE UM MENOR

PERGUNTA: QUAL O MENOR NÚMERO T_n DE MOVIMENTOS QUE DEVEM SER FEITOS?

EX: $T_1 = 1$
 $T_2 = 3$

OBS: PARA TRANSFERIR O n -ÉSIMO DISCO, DEVEMOS MOVER TODA A TORRE ACIMA DELE, MOVER ELE, E MOVER NOVAMENTE TODA A TORRE.

LOGO $T_n \geq 2T_{n-1} + 1$

CLARAMENTE, TAL ESTRATÉGIA É SUFICIENTE PARA TRANSFERIR A TORRE E, PORTANTO $T_n \leq 2T_{n-1} + 1$

ASSIM, TEMOS $T_n = 2T_{n-1} + 1$

COM ISSO PODEMOS CALCULAR T_n PARA TODO n :

n	1	2	3	4	5	
T_n	1	3	7	15	31	...

PERGUNTA: É POSSÍVEL OBTER UMA FÓRMULA PARA T_n QUE NÃO DEPENDA DE T_{n-1} ?
(i.e. UMA FÓRMULA SEM RECORRÊNCIA)

PROPOSIÇÃO: $T_n = 2^n - 1$

PROVA: POR INDUÇÃO EM n .

- CASO BASE: $T_1 = 1$ ✓
- HIPÓTESE DE INDUÇÃO (H.I.): $T_{n-1} = 2^{n-1} - 1$
- PASSO INDUTIVO:

SABEMOS QUE $T_n = 2T_{n-1} + 1$

PELA H.I. TEMOS $T_{n-1} = 2^{n-1} - 1$ E, PORTANTO, TEMOS

$$T_n = 2T_{n-1} + 1 = 2(2^{n-1} - 1) + 1 = 2^n - 1, \text{ COMO GOSTARIAMOS DE DEMONSTRAR} \quad \square$$

RETAS NO PLANO

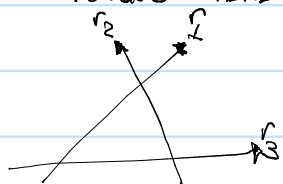
~> UMA RETA (INFINITA NAS DUAS DIREÇÕES) DIVIDE O PLANO EM DUAS REGIÕES.

~> DUAS RETAS PODEM DIVIDIR O PLANO EM TRÊS OU QUATRO REGIÕES

PERGUNTA: Qual o maior número L_m de regiões que podemos dividir o plano com m retas?

IDEIA: $L_m = 2^m$ PORQUE PARA CADA RETA PODAMOS ESCOLHER UM DOS SEUS LADOS.

ERRADO:



NÃO É POSSÍVEL ESTAR À ESQUERDA DE r_2
E À DIREITA DE r_2 E r_3 AO MESMO TEMPO!

NA VERDADE, A m -ÉSIMA RETA r_m DIVIDE (EM DUAS) CADA REGIÃO QUE ELA ATRAVESSA.
SE ELA ATRAVESSA k REGIÕES, ENTÃO ELA "CRIA" k NOVAS REGIÕES.

PARA r_m "ENTRAR" EM UMA NOVA REGIÃO, ELA DEVE CORTAR UMA RETA ANTIGA.

COMO DUAS RETAS PODEM SE TOCAR EM NO MÁXIMO UM PONTO,

r_m PODE CRIAR NO MÁXIMO m NOVAS REGIÕES E, PORTANTO,

$$L_m \leq L_{m-1} + m$$

POR OUTRO LADO, SE TEMOS UM CONJUNTO DE RETAS QUE NÃO CONTEM DUAS RETAS PARALELAS, ENTÃO TODAS AS RETAS SE TOCAM E ENTÃO

$$L_m = L_{m-1} + m$$

Assim, temos

$$L_m = L_{m-1} + m$$

$$= L_{m-2} + (m-1) + m$$

$\vdots$

$$= L_0 + 1 + 2 + \dots + m = 1 + S_m, \quad \text{ONDE } S_m = \sum_{i=1}^m i = \frac{m(m+1)}{2}$$

GAUSS: $S_m = 1 + 2 + \dots + (m-1) + m$

$$S_m = m + (m-1) + \dots + 2 + 1$$

$$2S_m = (m+1) + (m+1) + \dots + (m+1) + (m+1) = m \cdot (m+1)$$

PERGUNTA: O QUE É UMA FÓRMULA/FORMA FECHADA?

Qual o custo computacional de computar um número por uma RECURSÃO e por uma FÓRMULA FECHADA?

PERGUNTA: Qual o maior número Z_m de regiões que podemos dividir o plano com m ZIGS? (um zig é um par de semi-retas originando em um mesmo ponto).

O PROBLEMA DE JOSEFUS

~> Há um grupo de n pessoas ordenadas de forma circular

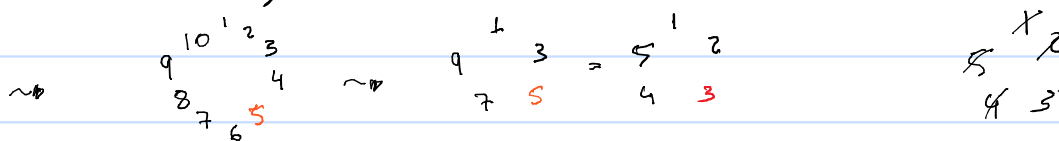
e uma regra de eliminação do tipo "pula i pessoas e elimina a $(i+1)$ -ésima pessoa"

PERGUNTA: Quem é a última pessoa $J_i(n)$ a ser eliminada?

VAMOS ESTUDAR O CASO $i=1$: pula um, elimina um.

~> Na primeira volta, todos os pares são eliminados

• Se n é par, então vamos rapidamente para o caso $n/2$



~> Assim, temos $J(2n) = 2J(n) - 1$

• Se n é ímpar, a primeira pessoa é eliminada no começo da segunda volta e aí caímos num caso semelhante



~> Assim, temos $J(2n+1) = 2J(n) + 1$

• Temos então as seguintes regras

$$J(1) = 1$$

$$J(2n) = 2J(n) - 1$$

$$J(2n+1) = 2J(n) + 1$$

~> Em vez de usarmos $J(n-1)$, usamos $J(n/2)$.

~> Chegamos a $J(1)$ mais rapidamente.

• TESTES

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$J(n)$	1	1	3	1	3	5	7	1	3	5	7	9	11	13	15	1

APARENTEMENTE TEMOS A SEGUINTE REGRA

$$J(2^m + l) = 2l + 1, \text{ ONDE } m \geq 0, \text{ E } 0 \leq l \leq 2^m$$

PROPOSIÇÃO: SEJA $m \in \mathbb{N}$, E SEJAM m E l T.q. $n = 2^m + l$ COM $m \geq 0$ E $0 \leq l \leq 2^m$
ENTÃO $J(n) = 2l + 1$.

PROVA: A PROVA SEQUE POR INDUÇÃO EM m .

CASO BASE: PARA $m = 1$, TEMOS $n = 2$ OU $n = 3$

SÁ VAMOS QUE $J(2) = 1$ E $J(3) = 3$, COMO DESEJADO

HIPÓTESE DE INDUÇÃO: SE $m' < m$ E $n' = 2^{m'} + l'$, ENTÃO $J(n') = 2l' + 1$.

PASSO INDUTIVO: SEJA $n = 2^m + l$. A PROVA É DIVIDIDA EM DOIS CASOS

1) SE n É PAR, ENTÃO TEMOS $J(n) = 2J\left(\frac{n}{2}\right) - 1$.

$$\text{NOTE QUE } \frac{n}{2} = \frac{2^m + l}{2} = 2^{m-1} + \frac{l}{2}$$

PELA HIPÓTESE DE INDUÇÃO TEMOS COM $m' = m-1$ E $l' = l/2$,

TEMOS $J\left(\frac{n}{2}\right) = 2\frac{l}{2} + 1$, O QUE IMPLICA $J(n) = 2(l+1) - 1 = 2l + 1$.

2) SE n É ÍMPAR, ENTÃO TEMOS $J(n) = 2J\left(\frac{n-1}{2}\right) + 1$.

$$\text{NOVAMENTE, } \frac{n-1}{2} = \frac{2^m + (l-1)}{2} = 2^{m-1} + \frac{(l-1)}{2}$$

PELA H.I. COM $m' = m-1$ E $l' = \frac{l-1}{2}$, TEMOS $J\left(\frac{n-1}{2}\right) = l-1 + 1 = l$,

O QUE IMPLICA $J(n) = 2l + 1$, COMO DESEJADO.

ENTENDENDO UM POUCO MAIS:

→ CONSIDERE A REPRESENTAÇÃO DE n NA BASE 2: $n = (b_m b_{m-1} \dots b_1 b_0)_2$

$$\text{EX: } 25 = 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = (11001)_2$$

$$n = \sum_{i=0}^m b_i \cdot 2^i$$

→ NOS TERMOS DA PROPOSIÇÃO TEMOS $n = 2^m + l$ E $J(n) = 2l + 1$.

SUAS REPRESENTAÇÕES BINÁRIAS SÃO

$$n = (b_m b_{m-1} \dots b_1 b_0)_2$$

$$l = (b_{m-1} \dots b_1 b_0)_2$$

$$2l = (b_{m-1} \dots b_1 b_0 0)_2$$

$$2l+1 = (b_{m-1} \dots b_1 b_0 1)_2$$

$$J(n) = (b_{m-1} \dots b_1 b_0 b_m)_2$$

UMA ROTAÇÃO!

LEMBRE-SE QUE $b_m = 1$

→ SE COMEÇARMOS COM n E ITERARMOS A FUNÇÃO J $m+1$ VEZES VAMOS FAZER $m+1$ ROTACÕES, PORÉM EVENTUALMENTE PERDEREMOS OS ZEROS

$$\text{EX: } J((1101)_2) = (1011)_2$$

$$J^2((1101)_2) = (0111)_2 = (111)_2$$

$$J^3((1101)_2) = J((111)_2) = (111)_2$$

→ APLICAÇÕES REPETIDAS DE J ENCONTRAM PONTOS FIXOS, i.e., n T.q. $J(n) = n$

$$\text{EX: } J(7) = 7 \quad \text{POIS } 7 = 2^{\overset{f^m}{2}} + 3 = 2^1 + 3 = 7 \quad \text{E } J(7) = 2 \cdot 3 + 1 = 7$$

→ CURIOSIDADE: QUANDO TEMOS $J(n) = n/2$?

$$\text{RESP. } J(n) = 2 \cdot l + 1 = n/2 = \frac{2^m + l}{2} \Rightarrow l = \frac{2^m - 2}{3}$$

→ SE $l = \frac{2^m - 2}{3}$ FOR INTEIRO, ENTÃO $2^m + l$ É SOLUÇÃO

→ ISSO ACONTECE SE E SOMENTE SE m É ÍMPAR

OBSEWE QUE QUEREMOS $n = (b_m \dots b_0)_2$ T.q.

$$J(n) = (b_{m-1} \dots b_0 b_m)_2 = \frac{n}{2} = (0 b_m \dots b_1)_2$$

ISSO IMPLICA QUE $b_{m-1} = 0$, $b_{m-i} = b_{m-i+1} \quad \forall i \in 1 = b_m = b_1$.

GENERALIZANDO

→ PROPOR RECURSÕES COM CONSTANTES DIFERENTES: α, β, γ

$$f(1) = \alpha$$

$$f(2n) = 2f(n) + \beta$$

$$f(2n+1) = 2f(n) + \gamma$$

~> PRIMEIRAMENTE, FAÇAMOS UMA TABELA COM VALORES DEPENDENDO DE α, β, γ

n	$f(n)$
1	α
2	$2\alpha + \beta$
3	$2\alpha + \gamma$
4	$4\alpha + 3\beta$
5	$4\alpha + 2\beta + \gamma$
6	$4\alpha + \beta + 2\gamma$
7	$4\alpha + 3\gamma$
8	$8\alpha + 7\beta$
9	$8\alpha + 6\beta + \gamma$
10	

~> EM GERAL, TEMOS $f(n) = A(n) \cdot \alpha + B(n) \cdot \beta + C(n) \cdot \gamma$

~> PELA TABELA, SE $n = 2^m + l$, TEMOS:

$$\begin{cases} A(n) = 2^m \\ B(n) = 2^m - 1 - l \\ C(n) = l \end{cases}$$

EXERCÍCIO: PROVE OS VALORES ACIMA!

~> VAMOS TENTAR PROVAR ESSES VALORES USANDO A ABORDAGEM

NOTE QUE SE $\alpha=1$ E $\beta=\gamma=0$, ENTÃO TEMOS $f(n)=A(n)$
 LOGO,

$$A(1) = 1$$

$$A(2n) = 2A(n)$$

$$A(2n+1) = 2A(n)$$

~> ISSO IMPLICA (POR INDUÇÃO) QUE $A(2^m + l) = 2^m$, COMO DESEJADO

~> SE ESCOLHERMOS UMA FUNÇÃO ESPECIAL, DIGAMOS $f(n)=1$, VAMOS OBTER VALORES ESPECIAIS DE α, β, γ

PELA RECURSÃO ESCOLHIDA TEMOS

$$1 = f(1) = \alpha$$

$$\alpha = 1$$

$$1 = f(2n) = 2f(n) + \beta = 2 + \beta$$

$$\Rightarrow \beta = -1$$

$$1 = f(2n+1) = 2f(n) + \gamma = 2 + \gamma$$

$$\gamma = -1$$

DE ONDE OBTENHAMOS $A(n) - B(n) - C(n) = f(n) = 1$

SIMILARMENTE, SE ESCOLHERMOS $f(n) = n$, TEMOS

$$1 = \alpha$$

$$\alpha = 1$$

$$2n = 2n + \beta$$

$$\Rightarrow \beta = 0 \Rightarrow A(n) + C(n) = n$$

$$2n+1 = 2n + \gamma$$

$$\gamma = 1$$

ASSIM TEMOS AS SEGUINTEs EQUAÇÕES SE $n = 2^m + 1$

$$A(n) = 2^m$$

$$A(n) - B(n) - C(n) = 1$$

$$A(n) + C(n) = n$$

$$O \text{ QUE IMPLICA QUE } C(n) = n - A(n) = 2^m + 1 - 2^m = 1$$

E

$$B(n) = A(n) - C(n) - 1 = 2^m - 1 - 1$$

□

SOMAS

VAMOS COMO RESOLVER $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$

• $\sum_{i=1}^k a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_k$: a_i é o **TERMO** DA SOMA

~> PODEMOS ESCREVER $\sum_{1 \leq i \leq k} a_i$, $\sum_{i \in [1, \dots, k]} a_i$

~> PODEMOS USAR OUTRAS INFORMAÇÕES

EX: $\sum_{i \text{ ímpar}} a_i$, $\sum_{i \text{ par}} a_i$

~> EM GERAL : $\sum_{i \in S} a_i$

• TOMAR CUIDADO (MAS AS VEZES É ÚTIL): $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1}$

• SE TEMOS $S = \sum a_i$, E $P(i)$ É FALSO PARA TODO i , ASSUMAMOS $S=0$
 $P(i)$ → PROPOSIÇÃO SOBRE i , EX: $i \in \text{Primo}$

• EVENTUALMENTE ESCRIVEREMOS $\sum_i a_i$ OU $\sum a_i$ QUANDO i ESTÁ BEM DEFINIDO

• EVENTUALMENTE a_i NÃO ESTÁ DEFINIDO PARA i .
⇒ SUPONHAMOS QUE $a_i = 0$.

• i NÃO PRECISA SER INTEIRO, PODE SER:

~> VETOR

~> REAL

~> ELEMENTOS DE UM CONJUNTO QUALQUER

SOMAS E RECORRÊNCIA

- CONSIDERE A SOMA $S_n = \sum_{i=0}^n a_i$

→ EQUIVALENTE À RECORRÊNCIA

$$\begin{cases} S_0 = a_0 \\ S_n = S_{n-1} + a_n \quad \text{PARA } n > 0 \end{cases}$$

EX: a_n É UMA CONSTANTE MAIS UM MÚLTIPLO DE n :

$$a_n = \beta + \gamma n$$

TEMOS
$$\begin{cases} R_0 = \alpha \\ R_n = R_{n-1} + \beta + \gamma n, \quad \text{PARA } n > 0 \end{cases}$$

TEREMOS
$$R_n = A(n) \cdot \alpha + B(n) \cdot \beta + C(n) \cdot \gamma$$

- TOMANDO $R_n = 1$, TEMOS $\alpha = 1$, $\beta = \gamma = 0$, O QUE IMPLICA $A(n) = 1$
- TOMANDO $R_n = n$, TEMOS $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $\gamma = 0 \Rightarrow B(n) = n$
- TOMANDO $R_n = n^2$, TEMOS $\alpha = 0$, $\beta = -1$ E $\gamma = 2$.

$$\text{LOGO } n^2 = -B(n) + 2C(n) \Rightarrow C(n) = \frac{n^2 + n}{2}$$

ASSIM, SE QUEREMOS CALCULAR $\sum_{i=0}^n (a+bi)$

PODEMOS REESCREVER COMO RECURRENÇA COM $\alpha = \beta = a$ E $\gamma = b$,
E A SOLUÇÃO É

$$aA(n) + aB(n) + bC(n) = a(n+1) + b(n+1)n/2$$

RECIPROCAMENTE, RECURRENCIAS PODER SER REDUZIDAS A SOMAS

EX: TORRE DE HANOÍ:

$$\begin{cases} T_0 = 0 \\ T_n = 2T_{n-1} + 1, \text{ PARA } n > 0 \end{cases}$$

→ DIVIDINDO OS DOIS LADOS POR 2^n , TEMOS

$$\begin{cases} T_0/2^0 = 0 \\ T_n/2^n = T_{n-1}/2^{n-1} + 1/2^n, \text{ PARA } n > 0 \end{cases}$$

→ COLOCANDO $T'_n = T_n/2^n$ PARA TODO n , TEMOS

$$\begin{cases} T'_0 = 0 \\ T'_n = T'_{n-1} + 2^{-n} \end{cases} \quad (\text{DEIXAMOS DE FORA } i=0)$$

NOS DANDO $T'_n = \sum_{i=1}^n 2^{-i} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$

→ VAMOS APRENDER A CALCULAR MAIS TORRE

ASSIM TEMOS $T_n = 2^n T'_n = 2^n - 1$

- DIVIDIR TODO POR 2^m FOI UMA SÓCDA GENIAL

→ ESSA MÁGICA PODE SER GENERALIZADA PARA QUALQUER
 RELAÇÃO DE RECORRÊNCIA DO TIPO

$$a_n T_n = b_n T_{n-1} + c_n$$

- A IDEIA É MULTIPLICAR OS DOIS LADOS POR UM FATOR SOMENTE S_n

$$S_n \cdot a_n T_n = S_n \cdot b_n \cdot T_{n-1} + S_n \cdot c_n$$

→ S_n É ESCOLHIDO DE MODO QUE

$$S_n \cdot b_n = S_{n-1} \cdot a_{n-1}$$

ENTÃO SE $T'_n = S_n a_n T_n$, TEMOS

$$\begin{aligned} T'_n &= S_n a_n T_n = S_n \cdot b_n T_{n-1} + S_n \cdot c_n \\ &= S_{n-1} \cdot a_{n-1} T_{n-1} + S_n \cdot c_n \\ &= T'_{n-1} + S_n \cdot c_n \end{aligned}$$

→ LOGO $T'_n = S_0 a_0 T_0 + \sum_{i=1}^n S_i c_i = S_1 b_1 T_0 + \sum_{i=1}^n S_i c_i$

→ E A ORIGINAL É

$$T_n = \frac{1}{S_n a_n} \left(S_1 b_1 T_0 + \sum_{i=1}^n S_i c_i \right)$$

• Como encontramos o S_m certo?

$$\leadsto \text{TEMOS } S_m = \frac{S_{m-1} \cdot a_{m-1}}{b_m} = \frac{a_{m-1} \cdot a_{m-2} \cdots a_1}{b_m \cdot b_{m-1} \cdots b_2}$$

EX: HANOI : $a_m = 1$ + $b_m = 2$ $c_m = 1$ nos dá

$$S_m = 2^{-m}$$

• CUIDADO PARA NÃO DIVIDIR POR ZERO!

• O MÉTODO DE FATOR SOMANTE FUNCIONA SEMPRE QUE OS a 'S E b 'S SÃO DIFERENTES DE ZERO

QUICKSORT

$\leadsto$ O NÚMERO MÉDIO DE OPERAÇÕES SATISFAZ A SEGUINTE RECORRÊNCIA:

$$C_0 = 0$$
$$C_m = m + 1 + \frac{2}{m} \sum_{k=0}^{m-1} C_k, \text{ PARA } m > 0$$

$\leadsto$ MUITO COMPLICADO!

$\leadsto$ MULTIPLICANDO OS DOIS LADOS POR m OBTÉMOS

$$mC_m = m^2 + m + 2 \sum_{k=0}^{m-1} C_k \quad (1)$$

PARA $m-1$ TEMOS

$$(m-1)C_{m-1} = (m-1)^2 + (m-1) + 2 \sum_{k=0}^{m-2} C_k \quad (2)$$

$\leadsto$ SUBTRAINDO (2) DE (1), TEMOS

$$mC_m - (m-1)C_{m-1} = 2m + 2C_{m-1}$$

$$\Rightarrow mC_m = (m+1)C_{m-1} + 2m \quad \text{BEM MELHOR!}$$

NOTE QUE ESSA RELAÇÃO É DA FORMA ANTERIOR

$$a_n C_n = b_n C_{n-1} + c_n$$

com $a_n = n$, $b_n = (n+1)$ e $c_n = 2n$

→ O MÉTODO DO FATOR SOMANTE DIZ PARA DEFINIRMOS

$$S_n = \frac{a_{n-1} a_{n-2} \dots a_1}{b_n b_{n-1} \dots b_2} = \frac{(n-1)(n-2) \dots 1}{(n+1) \cdot n \dots 3} = \frac{2}{(n+1) \cdot n}$$

→ USANDO A SOLUÇÃO QUE VIMOS ANTERIORMENTE, TEMOS

$$C_n = \frac{1}{S_n \cdot a_n} \left(s_1 b_1 C_0 + \sum_{k=1}^n s_k C_k \right)$$

$$= \frac{(n+1) \cdot \cancel{n}}{\cancel{2} \cdot \cancel{n}} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{\cancel{2} \cdot \cancel{2} k}{(k+1) \cdot \cancel{k}} = 2(n+1) \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1}$$

→ O ÚNICO MISTÉRIO É ESSE SOMATÓRIO, QUE É MUITO COMUM E POR ISSO DAMOS UM NOME ESPECIAL

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

→ NÚMERO HARMÔNICO

→ NOSSO SOMATÓRIO É UM POUCO DIFERENTE

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} = H_{n+1} - 1 + \frac{1}{n+1} = H_{n+1} - \frac{n}{n+1}$$

O QUE NOS DÁ $C_n = 2(n+1) H_{n+1} - 2n$

MANIPULAÇÃO DE SOMAS

~> GOSTARÍAMOS DE TRANSFORMAR UMA SOMA EM OUTRA MAIS FÁCIL.

~> HÁ TRÊS REGRAS BÁSICAS

$$\bullet \sum_{k \in K} c \cdot a_k = c \cdot \sum_{k \in K} a_k \quad (\text{DISTRIBUTIVIDADE})$$

$$\bullet \sum_{k \in K} (a_k + b_k) = \sum_{k \in K} a_k + \sum_{k \in K} b_k \quad (\text{ASSOCIATIVIDADE})$$

$$\bullet \sum_{k \in K} a_k = \sum_{p(k) \in K} a_{p(k)} \quad (\text{COMUTATIVIDADE})$$

↳ P É UMA PERMUTAÇÃO DE TODOS OS ELEMENTOS
↳ POSSO SOMAR EM QUALQUER ORDEM.

EX: $S = \sum_{k=0}^n (a + b \cdot k)$ — SOMA DOS ELEMENTOS DE UMA P.A

Pela **COMUTATIVIDADE**, TEMOS $S = \sum_{i=n-k=0}^n (a + bi) = \sum_{i=n-k=0}^n (a + b(n-k))$

Pela **ASSOCIATIVIDADE**, TEMOS

$$2S = \sum_{k=0}^n (2a + b \cdot n)$$

FINALMENTE, PELA **DISTRIBUTIVIDADE**, TEMOS

$$2S = (2a + b \cdot n) \cdot \sum_{k=0}^n 1 = (2a + b \cdot n) \cdot (n+1)$$

EX: GAUSS $S = \sum_{k=0}^n k$, TEMOS $a=0$, $b=1$,

0 QUE NOS DÁ $S = \frac{(2a + b \cdot n) \cdot (n+1)}{2} = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$

• UMA OUTRA REGRA BACANA É A SEGUINTE:

$$\sum_{k \in A} a_k + \sum_{k \in B} a_k = \sum_{k \in A \cup B} a_k + \sum_{k \in A \cap B} a_k$$

→ PORQUE OS ELEMENTOS DA INTERSEÇÃO APARECEM DUAS VEZES,
E DEVEM SER CONTADOS DUAS VEZES.

→ ISSO É USADO FREQUENTEMENTE PARA SEPARAR UM ÚNICO TERMO

$$\sum_{k=0}^m a_k = a_0 + \sum_{k=1}^m a_k$$

→ OU PARA COMBINAR DOIS CONJUNTOS DE ÍNDICES

$$\sum_{k=0}^m a_k + \sum_{k=m}^m a_k = a_m + \sum_{k=0}^m a_k$$

→ SERVE COMO BASE PARA UM MÉTODO DE PERTURBAÇÃO

→ NOMEAR PARA CONQUISTAR

$$S_m = \sum_{k=0}^m a_k$$

$$\begin{aligned} S_m + a_{m+1} &= \sum_{0 \leq k \leq m+1} a_k = a_0 + \sum_{1 \leq k \leq m+1} a_k \\ &= a_0 + \sum_{1 \leq k+1 \leq m+1} a_{k+1} \\ &= a_0 + \sum_{0 \leq k \leq m} a_{k+1} \end{aligned}$$

EX: SOMA DE UMA PROG. GEOMÉTRICA

$$S_m = \sum_{0 \leq k \leq m} a x^k$$

PELO MÉTODO DA PERTURBAÇÃO TEMOS

$$S_m + a x^{m+1} = a + \sum_{0 \leq k \leq m} a \cdot x^{k+1}$$

$$= a + x \cdot \sum_{0 \leq k \leq m} a \cdot x^k = a + x \cdot S_m$$

LOGO, TEMOS

$$S_m = a \frac{x^{m+1} - 1}{x - 1}$$

(PARA $x \neq 1$)

$\Downarrow$

QUANDO $x=1$,

TEMOS $S_m = a \cdot m$

EX: $S_m = \sum_{0 \leq k \leq m} k \cdot 2^k \rightarrow a_k = k \cdot 2^k \Rightarrow a_0 = 0$

PELO MÉTODO DA PERTURBAÇÃO TEMOS

$$S_m + (m+1) \cdot x^{m+1} = \sum_{0 \leq k \leq m} (k+1) \cdot 2^{k+1}$$

NOTE QUE $\sum_{0 \leq k \leq m} (k+1) \cdot 2^{k+1} = \sum_{0 \leq k \leq m} k \cdot 2^{k+1} + \sum_{0 \leq k \leq m} 2^{k+1}$ (ASSOCIATIVIDADE)

DISTRIBUTIVIDADE $\rightarrow$ $2 \cdot S_m$

$\frac{2^{m+2} - 2}{2 - 1}$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{EXEMPLO} \\ \text{INTERIOR} \end{array} \right.$

LOGO, $S_m + (m+1) x^{m+1} = 2S_m + 2^{m+2} - 2$

E PORTANTO $S_m = (m-1) \cdot 2^{m+1} + 2$

~> FAZENDO UMA CONTA PARECIDA, OBTENEMOS

$$\sum_{k=0}^n k \cdot x^k = \frac{x - (n+1)x^{n+1} + nx^{n+2}}{(1-x)^2} \quad \text{Para } x \neq 1.$$

~> Há outra forma de obter este resultado utilizando **cálculo diferencial**

COMECE COM $\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ E DERIVE DOS DOIS LADOS

OBTENEMOS $\sum_{k=0}^n k x^{k-1} = \frac{(1-x)(-(n+1)x^n) + 1-x^{n+1}}{(1-x)^2}$

$$= \frac{1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}$$

SOMAS MÚLTIPLAS

~> PODEMOS TER UMA SOMA COM DOIS OU MAIS ÍNDICES

$$\begin{aligned} \text{EX: } \sum_{1 \leq j, k \leq 3} a_j b_k &= a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_1 b_3 \\ &+ a_2 b_1 + a_2 b_2 + a_2 b_3 \\ &+ a_3 b_1 + a_3 b_2 + a_3 b_3 \end{aligned}$$

~> CONVENÇÃO DE IVERSON: $P(j, k)$ É UMA PROPOSIÇÃO

SOBRE INTEIROS (EX: $1 \leq j, k \leq 3$)
 $\epsilon [P(j, k)] = 1$ SE $P(j, k)$ É VERDADE
 $= 0$ SE $P(j, k)$ É FALSO

$$\text{EX: } \sum_{P(j, k)} a_{j, k} = \sum_{j, k} a_{j, k} [P(j, k)]$$

~> SOBRE TODOS OS INTEIROS j, k

~> PODEMOS USAR MÚLTIPLOS SIGMAS ($\sum$)

$$\begin{aligned} \text{EX: } \sum_j \sum_k a_{j, k} [P(j, k)] &= \sum_j \left(\sum_k a_{j, k} [P(j, k)] \right) \\ &= \sum_{j, k} a_{j, k} [P(j, k)] \end{aligned}$$

~> DIZEMOS QUE SOMAMOS PRIMEIRO EM k

~> UMA SOMA DUPLA PODE SER SOMADA PRIMEIRO EM QUALQUER DE SEUS ÍNDICES:

~> MUDANÇA DE ORDEM DO SOMATÓRIO

$$\sum_j \sum_k a_{j, k} [P(j, k)] = \sum_{P(j, k)} a_{j, k} = \sum_k \sum_j a_{j, k} [P(j, k)]$$

EX: SIMPLIFICANDO

$$\sum_{1 \leq j, k \leq 3} a_j b_k = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 a_j b_k = \sum_{j=1}^3 \left(a_j \sum_{k=1}^3 b_k \right)$$

NÃO DEPENDE DE k

NÃO DEPENDE DE j

$$= \left(\sum_{k=1}^3 b_k \right) \sum_{j=1}^3 a_j$$

$$= \left(\sum_{k=1}^3 b_k \right) \left(\sum_{j=1}^3 a_j \right)$$

~> DISTRIBUTIVIDADE GENERALIZADA:

$$\sum_{\substack{j \in J \\ k \in K}} a_j b_k = \left(\sum_{j \in J} b_k \right) \left(\sum_{k \in K} a_j \right)$$

~> NOTE QUE ISSO VALE APENAS QUANDO J E K SÃO INDEPENDENTES

~> O QUE ACONTECE QUANDO K DEPENDE DE J ?

$$\sum_{j \in J} \sum_{k \in K(j)} a_{j,k} = \sum_{k \in K'} \sum_{j \in J'(k)} a_{j,k}$$

↳ É UMA FUNÇÃO DE J

↳ O CONJUNTO DE ÍNDICES DE UMA SOMA DEPENDE DA VARIÁVEL DA OUTRA SOMA

~> ESSES CONJUNTOS DEVEM SATISFAZER A RELAÇÃO

$$[j \in J][k \in K(j)] = [k \in K'][j \in J'(k)]$$

~> ESSAS FATORIZAÇÕES SÃO SEMPRE POSSÍVEIS:

~> PODEMOS SEMPRE TOMAR $J = K' = \mathbb{Z}$ E

$$K(j) = \{k \in \mathbb{Z} : P(j, k)\}$$

$$J'(k) = \{j \in \mathbb{Z} : P(j, k)\}$$

Ex: $\sum_{j=1}^m \sum_{k=j}^m a_{j,k}$

• TEMOS $[1 \leq j \leq m][j \leq k \leq m] = [1 \leq j \leq k \leq m] = [1 \leq k \leq m][1 \leq j \leq k]$

• ISSO NOS DÁ O SOMATÓRIO $\sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^k a_{j,k}$

Ex: QUEREMOS ENCONTRAR UMA FÓRMULA SIMPLES PARA O SOMATÓRIO $\sum_{1 \leq j, k \leq m} a_j a_k = S_{\nabla}$

$$\begin{bmatrix} a_1 a_1 & a_1 a_2 & \dots & a_1 a_m \\ a_2 a_1 & & & \vdots \\ \vdots & & & \\ a_m a_1 & \dots & & a_m a_m \end{bmatrix}$$

~* COMO A MATRIZ É SIMÉTRICA ESTE SOMATÓRIO DEVE SER IGUAL AO SOMATÓRIO DO TRIÂNGULO INFERIOR S_{Δ}
 ~* E DEVE SER ALGO PARECIDO COM MÉTODE DA SOMA DE TODOS OS ELEMENTOS DA MATRIZ.

~* DEVEMOS TER $2S_{\nabla} = S_{\nabla} + S_{\Delta} = \sum_{1 \leq j, k \leq m} a_j a_k + \sum_{1 \leq j = k \leq m} a_j a_k$

NOTE QUE $\sum_{1 \leq j, k \leq m} a_j a_k = \left(\sum_{j=1}^m a_j \right)^2$

E $\sum_{1 \leq j = k \leq m} a_j a_k = \sum_{j=1}^m a_j^2$

ASSIM, TEMOS $S_{\nabla} = \frac{1}{2} \left(\left(\sum_{j=1}^m a_j \right)^2 + \sum_{j=1}^m a_j^2 \right)$

Ex:

$$S = \sum_{1 \leq j < k \leq n} (a_k - a_j)(b_k - b_j)$$

NOTE QUE HÁ SIMETRIA QUANDO TROCAMOS k POR j

$$(a_k - a_j)(b_k - b_j) = (a_j - a_k)(b_j - b_k)$$

$$\text{Logo } S = \sum_{1 \leq j < k \leq n} (a_k - a_j)(b_k - b_j) = \sum_{1 \leq k < j \leq n} (a_j - a_k)(b_j - b_k)$$

Além disso, note que

$$[1 \leq j < k \leq n] [1 \leq k < j \leq n] = [1 \leq j, k \leq n] - [1 \leq j = k \leq n]$$

Somando as duas formas de S , temos

$$2S = \sum_{1 \leq j < k \leq n} (a_k - a_j)(b_k - b_j) + \sum_{1 \leq k < j \leq n} (a_j - a_k)(b_j - b_k)$$

$$= \sum_{1 \leq j, k \leq n} (a_k - a_j)(b_k - b_j) - \sum_{1 \leq j = k \leq n} (a_k - a_j)(b_k - b_j) \quad \xrightarrow{0}$$

O primeiro somatório pode ser expandido como segue

$$\sum_{1 \leq j, k \leq n} (a_k - a_j)(b_k - b_j) = \sum_{1 \leq j, k \leq n} (a_k b_k - a_k b_j - a_j b_k + a_j b_j)$$

$$= 2 \sum_{1 \leq j, k \leq j} a_j b_j - 2 \sum_{1 \leq j, k \leq n} a_j b_k$$

$$= 2n \sum_{1 \leq j \leq n} a_j b_j - 2 \left(\sum_{1 \leq j \leq n} a_j \right) \left(\sum_{1 \leq j \leq n} b_j \right)$$

REARRUMANDO, TEMOS

$$\left(\sum_{1 \leq j \leq n} a_j \right) \left(\sum_{1 \leq j \leq n} b_j \right) = n \sum_{j=1}^n a_j b_j - \sum_{1 \leq j < k \leq n} (a_k - a_j)(b_k - b_j)$$

ISSO NOS DÁ AS **DESIGUALDADES DE CHEBYSHEV** PARA SEQUÊNCIAS **MONÓTONAS**

$$1) \left(\sum_{1 \leq j \leq n} a_j \right) \left(\sum_{1 \leq j \leq n} b_j \right) \leq n \sum_{j=1}^n a_j b_j \quad \text{SE} \quad a_1 \leq \dots \leq a_n \text{ e } b_1 \leq \dots \leq b_n$$

$$2) \left(\sum_{1 \leq j \leq n} a_j \right) \left(\sum_{1 \leq j \leq n} b_j \right) \leq n \sum_{j=1}^n a_j b_j \quad \text{SE} \quad a_1 \leq \dots \leq a_n \text{ e } b_1 \geq \dots \geq b_n$$

VOLTANDO À COMUTATIVIDADE

VIMOS QUE SE $p: J \rightarrow J$ É UMA PERMUTAÇÃO (I.E. BIJETIVA) ENTÃO

$$\sum_{j \in J} a_j = \sum_{j \in J} a_{p(j)}$$

MAS O QUE ACONTECE QUANDO f É UMA FUNÇÃO $f: J \rightarrow K$

NESTE CASO, TEMOS $\sum_{j \in J} a_{f(j)} = \sum_{k \in K} a_k \cdot \# \tilde{f}(k)$

QUANDO f É BIJETIVA, TEMOS $\# \tilde{f}(k) = 1 \quad \forall k$

O NÚMERO DE ELEMENTOS EM J QUE MANDAM EM k : $|\{j \in J : f(j) = k\}|$

PODEMOS PROVAR ISSO MUDANDO A ORDEM DO SOMATÓRIO

$$\sum_{j \in J} a_{f(j)} = \sum_{\substack{j \in J \\ k \in K}} a_k [f(j) = k] = \sum_{k \in K} a_k \cdot \sum_{j \in J} [f(j) = k]$$

EXEMPLO CONCRETO

$$S_m = \sum_{1 \leq j < k \leq m} \frac{1}{k-j} : S_1 = 0, S_2 = 1, S_3 = \frac{1}{2-1} + \frac{1}{3-1} + \frac{1}{3-2} = \frac{5}{2}$$

TEMOS

$$\begin{aligned} S_m &= \sum_{1 \leq k \leq m} \sum_{1 \leq j < k} \frac{1}{k-j} \\ &= \sum_{1 \leq k \leq m} \sum_{1 \leq k-j < k} \frac{1}{j} \quad (\text{TROCANDO } j \text{ POR } k-j) \\ &= \sum_{1 \leq k \leq m} \sum_{0 \leq j \leq k-1} \frac{1}{j} \quad (\text{SIMPLIFICANDO OS LIMITES DE } j) \\ &= \sum_{1 \leq k \leq m} H_{k-1} \\ &= \sum_{0 \leq k \leq m} H_k \end{aligned}$$

~> NOTE QUE ESCOLHEMOS ARBITRARIAMENTE DIVIDIR O SOMATÓRIO SOMANDO PRIMEIRO EM j .

~> MAS OBTERÍAMOS O MESMO RESULTADO SOMANDO PRIMEIRO EM k .
(EXERCÍCIO)

~> AINDA HÁ OUTRA FORMA:

$$S_m = \sum_{1 \leq j < k \leq m} \frac{1}{k-j} = \sum_{1 \leq j < k+j \leq m} \frac{1}{k} \quad (\text{TROCANDO } k \text{ POR } k+j)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{1 \leq k \leq m} \sum_{1 \leq j \leq m-k} \frac{1}{k} \\ &= \sum_{1 \leq k \leq m} \frac{m-k}{k} \\ &= \sum_{1 \leq k \leq m} \frac{m}{k} - \sum_{1 \leq k \leq m} 1 \\ &= m \sum_{1 \leq k \leq m} \frac{1}{k} - m = m H_m - m \end{aligned}$$

~> COMBINANDO COM A TENTATIVA QUE DEU ERRO: $\sum_{0 \leq k \leq m} H_k = m H_m - m$

MÉTODOS GERAIS

~> VAMOS TENTAR ENCONTRAR UMA FORMA FECHADA PARA A SOMA DOS n PRIMEIROS QUADRADOS:

$$\square_n = \sum_{j=0}^n j^2$$

PROVE POR INDUÇÃO!

↓
MÉTODO 1

~> A RESPOSTA JÁ EXISTE NA LITERATURA:
↳ MÉTODO 0

$$\square_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

PERTURBE A SOMA

$$\begin{aligned}\square_n + (n+1)^2 &= \sum_{0 \leq j \leq n} (j+1)^2 = \sum_{0 \leq j \leq n} (j^2 + 2j + 1) \\ &= \sum_{0 \leq j \leq n} j^2 + 2 \sum_{0 \leq j \leq n} j + \sum_{0 \leq j \leq n} 1 \\ &= \square_n + 2 \sum_{0 \leq j \leq n} j + (n+1)\end{aligned}$$

NOTE QUE OS $\square_n$ 'S SE CANCELAM E OBTENHOS

$$2 \sum_{0 \leq j \leq n} j = (n+1)^2 - (n+1) = (n+1) \cdot n$$

↳ QUE NOS DÁ UMA FÓRMULA PARA A SOMA DOS n PRIMEIROS INTEIROS.

~> VAMOS TENTAR FAZER PARECIDO COM A SOMA DOS CUBOS

$$\square_n = \sum_{j=1}^n j^3$$

$$\begin{aligned}\text{Temos } \square_n + (n+1)^3 &= \sum_{0 \leq j \leq n} (j+1)^3 = \sum_{0 \leq j \leq n} (j^3 + 3j^2 + 3j + 1) \\ &= \square_n + 3 \square_n + 3 \frac{(n+1) \cdot n}{2} + (n+1)\end{aligned}$$

$$\text{O QUE NOS DÁ } 3 \square_n = (n+1)^3 - \frac{3}{2}(n+1) \cdot n - (n+1) = (n+1) \left(n + \frac{1}{2} \right) \cdot n$$

USANDO O MÉTODO DA COMPILAÇÃO

CONSIDERE A SEGUINTE RELAÇÃO DE RECORRÊNCIA

$$R_0 = \alpha$$

$$R_m = R_{m-1} + \beta + \gamma \cdot m + \delta m^2, \quad \text{PARA } m > 0$$

SUA FORMA GERAL É

$$R_m = A(m) \cdot \alpha + B(m) \cdot \beta + C(m) \cdot \gamma + D(m) \cdot \delta$$

LEMBRE-SE QUE JÁ DETERMINAMOS $A(m)$, $B(m)$, $C(m)$ POIS TRABALHAMOS EM UM CASO IDÊNTICO QUANDO $\delta = 0$
(VEJA PÁG. 11)

$$A(m) = 1$$

$$B(m) = m$$

$$C(m) = \frac{m^2 + m}{2}$$

SE TOMAMOS $R_m = m^3$ OBTÊMOS $\alpha = 0$ E

$$\begin{aligned} \cancel{m^3} &= (m-1)^3 + \beta + \gamma m + \delta m^2 \\ &= \cancel{m^3} - 3m^2 + 3m - 1 + \beta + \gamma m + \delta m^2 \end{aligned}$$

O QUE NOS DÁ $\beta = 1$, $\gamma = -3$, E $\delta = 3$, O QUE IMPLICA EM

$$\begin{aligned} m^3 &= B(m) - 3C(m) + 3D(m) \\ &= m - \frac{3}{2}(m^2 + m) + 3D(m) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow D(m) = \frac{m^3}{3} + \frac{m^2}{2} + \frac{m}{6}$$

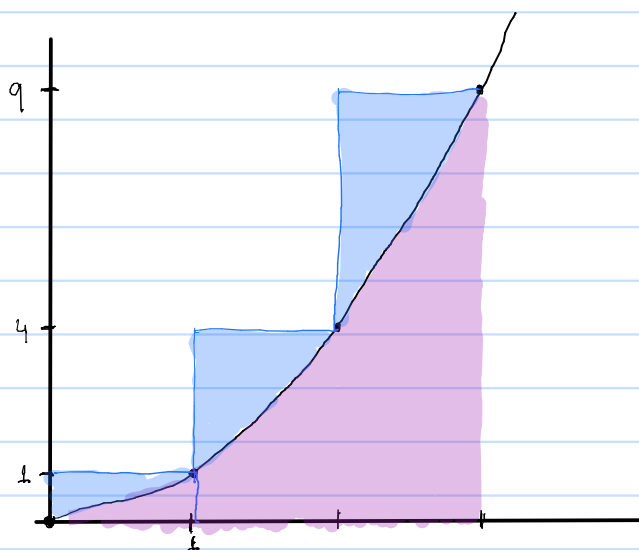
ESTAMOS INTERESSADOS NA SOMA $\Pi_m = \Pi_{m-1} + m^2$, QUE CORRESPONDE AO CASO $\Pi_m = R_m$ E $\alpha = \beta = \gamma = 0$, $\delta = 1$: $\Pi_m = D(m)$

Cálculo Integral

- A INTEGRAL DE UMA FUNÇÃO f PODE SER VISTA COMO A ÁREA ABAIXO DA CURVA DE f

~ E PODEMOS VÊ-LA COMO UM LIMITE DE UMA SOMA DE RETÂNGULOS QUANDO A LARGURA DO RETÂNGULO VAI PARA ZERO.

~ ESSES RETÂNGULOS TÊM UM VÉRTICE NA CURVA



~ ENTÃO $\sum_{k=1}^n k^2$ É APROXIMADAMENTE $\int_0^n x^2 dx = \frac{n^3}{3}$

~ PODEMOS ESTUDAR O ERRO NA APROXIMAÇÃO $E_n = \square_n - \frac{1}{3}n^3$

COMO $\square_n$ RESPEITA A RECORRÊNCIA $\square_n = \square_{n-1} + n^2$, TEMOS

$$E_n = \square_n - \frac{1}{3}n^3 = \square_{n-1} + n^2 - \frac{1}{3}n^3$$

$$= E_{n-1} + \frac{1}{3}(n-1)^3 + n^2 - \frac{1}{3}n^3$$

$$= E_{n-1} + n - \frac{1}{3}$$

$$\text{ISSO NOS DÁ A FÓRMULA DE } E_n = \sum_{k=1}^n k - \frac{n}{3} \\ = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n}{3} = \frac{n}{6}(n+1)$$

○ QUE NOS DÁ A FÓRMULA DE $\square_n = \frac{1}{3}n^3 + \frac{n}{6}(n+1)$

PODEMOS TAMBÉM SOMAR O ERRO EM CADA UNIDADE:

$$\begin{aligned} E_m &= \Omega_m - \int_0^m x^2 dx = \sum_{k=0}^m \left(k^2 - \int_{k-1}^k x^2 dx \right) \\ &= \sum_{k=0}^m \left(k^2 - \frac{k^3 - (k-1)^3}{3} \right) = \sum_{k=0}^m \left(k - \frac{1}{3} \right) \end{aligned}$$

EXPANDIR E CONTRAIR

IDEIA: TRANSFORMAR UMA SOMA SIMPLES EM UMA SOMA DUPLA APARENTEMENTE MAIS COMPLICADA

$$\begin{aligned} \Omega_m &= \sum_{1 \leq k \leq m} k^2 = \sum_{1 \leq j \leq k \leq m} k = \sum_{1 \leq j \leq m} \sum_{j \leq k \leq m} k \\ &= \sum_{1 \leq j \leq m} \left(\frac{j+m}{2} \right) (m-j+1) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{1 \leq j \leq m} (m(m+1) + j - j^2) \\ &= \frac{1}{2} m^2 (m+1) + \frac{1}{4} m(m+1) - \frac{1}{2} \Omega_m \end{aligned}$$

CÁLCULO FINITO E INFINITO

→ O cálculo finito é um análogo do cálculo infinito

→ LEMBRE-SE DO OPERADOR DERIVADA D

$$Df(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

→ NO CÁLCULO FINITO TEMOS O OPERADOR DIFERENÇA Δ

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$$

$h=1$

↳ ISSO É O MAIS PERTO QUE PODAMOS CHEGAR DE LIMITE

→ D E Δ SÃO CHAMADOS DE OPERADORES PORQUE OPERAM FUNÇÕES TRANSFORMANDO-NAS EM OUTRAS FUNÇÕES.

$$\text{EX: } f(x) = x^m \Rightarrow Df(x) = m \cdot x^{m-1}$$

$$\text{PODEMOS ESCREVER } D(x^m) = m x^{m-1}$$

→ INFELIZMENTE Δ NÃO PRODUZ UM RESULTADO TÃO ELEGANTE.

$$\Delta(x^3) = (x+1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1$$

POTÊNCIAS

→ AS SEGUINTE FUNÇÕES POSSUEM UM COMPORTAMENTO MAIS INTERESSANTE SÃO CHAMADAS DE m -ÉSIMA POTÊNCIA

$$x^{\overline{m}} = x(x-1) \cdots (x-m+1)$$

$$x^{\underline{m}} = x(x+1) \cdots (x+m-1)$$

m INTEIRO, $m \geq 0$

CONVENCIONAMOS QUE $x^{\underline{0}} = x^{\overline{0}} = 1$.

→ DIZEMOS x (ELEVADO) Δ m DESCENDO | SUBINDO PARA $x^{\overline{m}}$ | $x^{\underline{m}}$

→ ESSAS FUNÇÕES SÃO TAMBÉM CHAMADAS DE POTÊNCIAS FATORIAIS DECRESCENTES / CRESCENTES

→ OPERADOR Δ APLICADO A POTÊNCIAS DECRESCENTES:

$$\begin{aligned}\Delta(x^m) &= (x+1)^m - x^m \\ &= (x+1) \cdot \underbrace{x \cdot \dots \cdot (x-m+2)}_{\text{PARTE COMUM}} - \underbrace{x \cdot (x-1) \cdot \dots \cdot (x-m+1)}_{\text{PARTE COMUM}} \\ &= m \cdot x \cdot \dots \cdot (x-m+2) = m \cdot x^{m-1}\end{aligned}$$

→ MAS E A INTEGRAL

→ A INTEGRAL É UM OPERADOR INVERSO DA DERIVADA

→ O TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO DIZ QUE

$$g(x) = Df(x) \quad \text{SE E SOMENTE SE} \quad \int g(x) dx = f(x) + C$$

→ A INTEGRAL INDEFINIDA É A CLASSE DE FUNÇÕES CUJA DERIVADA É $g(x)$

→ ANALOGAMENTE, O OPERADOR Δ POSSUI UM INVERSO

→ O TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO FINITO DIZ

$$g(x) = \Delta f(x) \quad \text{SE E SOMENTE SE} \quad \sum g(x) \Delta x = f(x) + C$$

↓
SOMA INDEFINIDA

→ δ ESTÁ PARA Δ ASSIM COMO d ESTÁ PARA D

→ O C DA INTEGRAL É UMA CONSTANTE, ENQUANDO O C DO SOMATÓRIO É UMA FUNÇÃO $P(x)$ TAL QUE $P(x+1) = P(x)$.

$$\text{EX: } P(x) = a + b \sin(2\pi x)$$

→ $P(x)$ É ANULADA QUANDO TOMAMOS A DIFERENÇA.

ASSIM COMO CONSTANTES SÃO ANULADAS PELA DERIVADA

~> INTEGRAIS DEFINIDAS: SE $g(x) = Df(x)$, ENTÃO

$$\int_a^b g(x) dx = f(x) \Big|_a^b = f(b) - f(a)$$

~> SOMAS DEFINIDAS: SE $g(x) = \Delta f(x)$, ENTÃO

$$\sum_a^b g(x) \Delta x = f(x) \Big|_a^b = f(b) - f(a)$$

↳ PARECE COM A NOTAÇÃO USUAL

~> VAMOS ENTENDER UM POUCO MAIS:

$$\bullet \sum_a^a g(x) \Delta x = f(x) \Big|_a^a = f(a) - f(a) = 0$$

$$\bullet \sum_a^{a+1} g(x) \Delta x = f(x) \Big|_a^{a+1} = f(a+1) - f(a) = g(a)$$

$$\bullet \sum_a^{b+1} g(x) \Delta x - \sum_a^b g(x) \Delta x = (f(b+1) - f(a)) - (f(b) - f(a)) \\ = f(b+1) - f(b) = g(b)$$

LOGO, APLICANDO UMA INDUÇÃO SIMPLES, TEMOS

$$\sum_a^b g(x) \Delta x = \sum_{k=a}^{b-1} g(k) = \sum_{a \leq k < b} g(k) \quad \text{PARA } b > a$$

OUTRA FORMA DE VER ISSO É EXPANDINDO O SOMATÓRIO:

$$\sum_{a \leq k < b} g(k) = (\cancel{f(a+1)} - f(a)) + (\cancel{f(a+2)} - \cancel{f(a+1)}) + \dots + (f(b) - \cancel{f(b-1)}) \\ = f(b) - f(a)$$

~> ESSE TIPO DE SOMA É CHAMADO DE TELESCÓPICA

→ O QUE ACONTECE QUANDO $b < a$?

$$\int_a^b g(x) dx = f(b) - f(a) = - (f(a) - f(b)) = - \int_b^a g(x) dx$$

↳ DA MESMA FORMA QUE A INTEGRAL

→ ANALOGAMENTE, TEMOS $\int_a^b + \int_b^c = \int_a^c$:

$$\int_a^b g(x) dx + \int_b^c g(x) dx = \int_a^c g(x) dx$$

→ MAS PARA QUE SERVE TUDO ISSO?

CÁLCULO DE SOMA DE POTÊNCIAS FATORIAIS DECRESCENTES

$$\text{EX: } \sum_{0 \leq k \leq n} k^m = \frac{k^{m+1}}{m+1} \Big|_0^n = \frac{n^{m+1}}{m+1}, \text{ PARA } m, n \text{ INTEIROS } \geq 0$$

EX: SOMATÓRIO DE k^2 : $\sum_{0 \leq k \leq n} k^2$

NOTE QUE $k^2 = k^{\frac{2}{1}} + k^{\frac{1}{1}}$, E ENTÃO

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq k \leq n} k^2 &= \sum_{0 \leq k \leq n} k^{\frac{2}{1}} + k^{\frac{1}{1}} = \sum_{0 \leq k \leq n} k^{\frac{2}{1}} + \sum_{0 \leq k \leq n} k^{\frac{1}{1}} \\ &= \frac{k^{\frac{3}{1}}}{\frac{3}{1}} \Big|_0^n + \frac{k^{\frac{2}{1}}}{\frac{2}{1}} \Big|_0^n = \frac{n^{\frac{3}{1}}}{\frac{3}{1}} + \frac{n^{\frac{2}{1}}}{\frac{2}{1}} \end{aligned}$$

→ TROCANDO n POR $n-1$, OBTENEMOS UMA NOVA FORMA DE CALCULAR Δ_n

EX: SOMATÓRIO DOS CUBOS: $\sum_{0 \leq k \leq n} k^3$

$$\begin{aligned} \text{NOTE QUE } k^3 &= k^{\frac{3}{1}} + 3k^{\frac{2}{1}} + k^{\frac{1}{1}} \\ \text{LOGO, } \sum_{a \leq k \leq b} k^3 &= \frac{k^{\frac{4}{1}}}{\frac{4}{1}} + k^{\frac{3}{1}} + \frac{k^{\frac{2}{1}}}{\frac{2}{1}} \Big|_a^b \end{aligned}$$

É SEMPRE POSSÍVEL TRANSFORMAR POTÊNCIAS COMUNS EM POTÊNCIAS FATORIAIS: NÚMEROS DE STIRLING

OUTRAS PROPRIEDADES

• LEMBRE-SE QUE $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

VAMOS CALCULAR $(x+y)^2$

$$(x+y)^2 = (x+y)(x+y-1) = x^2 + 2xy + y^2 - x - y$$

$$= x(x-1) + 2xy + y(y-1)$$

$$= x^2 + 2x^1y^1 + y^2$$

EXPOENTES NEGATIVOS

NOTE QUE TEMOS

$$x^3 = x(x-1)(x-2) \quad \div (x-2)$$

$$x^2 = x(x-1) \quad \div (x-1)$$

$$x^1 = x \quad \div x$$

$$x^0 = 1$$

ENTÃO EXTRAPOLAMOS PARA

$$x^{-1} = 1/(x+1) \quad \div (x+1)$$

$$x^{-m} = \frac{1}{(x+1) \cdots (x+m)}$$

• LEMBRE-SE QUE $x^{m+n} = x^m \cdot x^n$

AQUI TEMOS $x^{m+n} = x^m \cdot (x-m)^m$

~ SE $m=2$ E $n=-3$ TEMOS

$$x^{m+n} = x^2 \cdot (x-2)^{-3} = x \cdot (x-1) \cdot \frac{1}{(x-1) \cdot x \cdot (x+1)} = \frac{1}{(x+1)} = x^{-1}$$

SERÁ QUE A DIFERENÇA TAMBÉM FUNCIONA COM EXP. NEGATIVOS?

$$\Delta x^{\frac{m}{m}} = m \cdot x^{\frac{m-1}{m}}?$$

EX: $m = -2$

$$\Delta x^{-2} = \frac{1}{(x+2)(x+3)} - \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{(x+1) - (x+3)}{(x+1)(x+2)(x+3)} = -2 x^{-3}$$

Um argumento similar mostra que a fórmula vale para todo m

isso implica que a propriedade do somatório também funciona

$$\sum_a^b x^{\frac{m}{m}} \delta x = \frac{x^{\frac{m+1}{m+1}}}{m+1} \Big|_a^b$$

EXCETO QUANDO $m+1=0$

LEMBRE-SE QUE NO CASO DA INTEGRAL TEMOS

$$\int_a^b x^{-1} = \ln x \Big|_a^b$$

GOSTARÍAMOS DE UM ANÁLOGO FINITO DE $\ln x$

PROCURAMOS UMA FUNÇÃO $f(x)$ TAL QUE

$$x^{-1} = \frac{1}{x+1} = \Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$$

NÃO É DIFÍCIL VER QUE

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{x} = H_x$$

SATISFAZ TAL PROPRIEDADE

ASSIM, TEMOS

$$\sum_a^b x^{\frac{m}{m}} \delta x = \begin{cases} \frac{x^{\frac{m+1}{m+1}}}{m+1} \Big|_a^b & \text{se } m \neq -1 \\ H_x \Big|_a^b & \text{se } m = -1 \end{cases}$$

SERÁ QUE HÁ UM ANÁLOGO PARA e^x ?

~> QUE FUNÇÃO POSSUI A PROPRIEDADE $\Delta f(x) = f(x)$?

FÁCIL: $f(x+1) - f(x) = f(x)$

SE E SOMENTE SE $2f(x) = f(x+1)$

OU SEJA: $f(x) = 2^x$

~> PARA C ARBITRÁRIO, TEMOS

$$\Delta C^x = C^{x+1} - C^x = (C-1) \cdot C^x$$

~> LOGO A SOMA É

$$\sum_{a \leq x \leq b} C^x = \sum_a^b C^x \Delta x = \frac{C^x}{C-1} \Big|_a^b = \frac{C^b - C^a}{C-1}$$

REGRAS DO PRODUTO

~> $D(uv) = uD(v) + vD(u)$

~> ISSO TAMBÉM NOS DÁ A REGRA $\int u Dv = uv - \int v Du$

COMO FAZEMOS UM ANÁLOGO?

$$\Delta(u(x) \cdot v(x)) = u(x+1) \cdot v(x+1) - u(x) \cdot v(x)$$

$$= u(x+1)v(x+1) - u(x)v(x+1) + u(x)v(x+1) - u(x)v(x)$$

$$= u(x) \Delta v(x) + v(x+1) \Delta u(x)$$

~> QUASE!

DEFINIMOS O OPERADOR DESLOCAMENTO

$$Ef(x) = f(x+1)$$

E ENTÃO $\Delta(uv) = u \Delta v + Ev \Delta u$

EX: O ANÁLOGO DISCRETO DE $\int x e^x dx$ É $\sum_1 x 2^x \Delta x$

SOMAR POR PARTES: TOMAR $u(x) = x$ E $\Delta v(x) = 2^x$;

ENTÃO $\Delta u(x) = 1$, $v(x) = 2^x$ E $E v(x) = 2^{x+1}$

SUBSTITUINDO:

$$\sum x 2^x \Delta x = x 2^x - \sum 2^{x+1} \Delta x = x 2^x - 2^{x+1} + C$$

EX: O ANÁLOGO A $\int x \ln x dx$ É $\sum x H_x \Delta x$.

TOMANDO $u(x) = H_x$ E $\Delta v(x) = x = x^1$, OBTENHAMOS

$$\Delta u(x) = x^{-1}, \quad v(x) = \frac{x^2}{2} \quad \text{E} \quad E v(x) = \frac{(x+1)^2}{2}$$

$$\text{LOGO, } \sum x H_x \Delta x = \frac{x^2}{2} H_x - \sum \frac{(x+1)^2}{2} \cdot x^{-1} \Delta x$$

$$= \frac{x^2}{2} H_x - \frac{1}{2} \sum x^1 \Delta x$$

$$= \frac{x^2}{2} H_x - \frac{x^2}{4} + C$$

COLOCANDO OS LIMITES, TEMOS

$$\sum_{0 \leq k < m} k H_k = \sum_{10}^m x H_x \Delta x = \frac{m^2}{2} \left(H_m - \frac{1}{2} \right)$$

SOMAS INFINITAS

→ UM SOMATÓRIO DE UM NÚMERO INFINITO DE TERMOS

→ NÃO ESTÁ BEM DEFINIDO, NÃO É UM VALOR.

→ PARECE NATURAL FAZER DEFINIÇÕES DE TAL FORMA QUE

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

SEJA IGUAL A 2. UMA VEZ QUE

$$2S = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 2 + S$$

→ MAS ESSA IDEIA IMPLICA QUE A SOMA

$$T = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \dots$$

É IGUAL A -1, PORQUE

$$2T = 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + \dots = T - 1$$

→ VAMOS TENTAR UMA ~~BOM~~ DEFINIÇÃO PARA $\sum_{k \in K} a_k$

→ SUPONHA INICIALMENTE QUE $a_k \geq 0$ PARA TODO k .

→ RAZOÁVEL: SE HÁ UMA COTA SUPERIOR, I.E., SE EXISTE CONSTANTE A T.q.

$$\sum_{k \in F} a_k \leq A$$

PARA TODO SUBCONJUNTO FINITO $F \subseteq K$.

→ NESTE CASO, DEFINIMOS $\sum_{k \in K} a_k$ COMO O MENOR A COM ESTA PROPRIEDADE

→ SE NÃO EXISTE TAL CONSTANTE, DIZEMOS $\sum_{k \in K} a_k = \infty$

→ ISSO QUER DIZER QUE PARA TODO NÚMERO REAL, EXISTE UM SUBCONJUNTO FINITO DE TERMOS CUJA SOMA O ULTRAPASSA.

→ NOTE QUE A DEFINIÇÃO NÃO DEPENDE DA ORDEM DOS a_k

→ No caso em que K é o conjunto de inteiros não-negativos, nossa definição implica em

$$\sum_{k \geq 0} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k$$

EX: $\sum_{k \geq 0} x^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ \infty & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

EX: $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \sum_{k \geq 0} k^{-2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k \geq 0} k^{-2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k^{-1}}{-1} \Big|_0^n = 1$

• O que acontece quando a série possui termos negativos?

→ Qual o valor de $\sum_{k \geq 0} (-1)^k = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$
 $= (1-1) + (1-1) + \dots$
 $= 0 + 0 + \dots = 0?$

Por outro lado $= 1 + (-1+1) + (-1+1) + \dots$
 $= 1 + 0 + 0 + \dots = 1?$

→ Poderíamos tentar tomar $x = -1$ na fórmula $\sum_{k \geq 0} x^k = \frac{1}{1-x}$

e obteríamos $1/2$.

↳ Embora seja uma soma de números inteiros.

EX: $\sum_k a_k$ onde $a_k = \frac{1}{k+1}$ se $k \geq 0$ e $a_k = \frac{1}{k-1}$ se $k < 0$.

Podemos escrevê-la como

$$\dots + \left(-\frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

SE AGROPARMOS "CENTRADO" EM 1

$$\dots + \left(-\frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) + (1) + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

OBTENEMOS O VALOR 1.

SE AGROPARMOS "CENTRADO" EM $-\frac{1}{2}$ OBTENEMOS O MESMO VALOR

$$\dots + \left(-\frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

SE AGROPARMOS COMO SEGUÊ

$$\dots + \left(-\frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots$$

O n -ÉSIMO PAR DE PARENTÊSES CONTÉM OS TERMOS

$$-\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} - \dots - \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} = 1 + H_{2n} - H_{n+1}$$

QUE VEREMOS (NO FUTURO) QUE $\lim_{n \rightarrow \infty} (H_{2n} - H_{n+1}) = \ln 2$

O QUE SUGERE QUE O SOMATÓRIO DÁ $1 + \ln 2$

HA VARIAS FORMAS DE DAR SENTIDO A ESSE TIPO DE SOMATÓRIO, MAS NÃO É O NOSSO OBJETIVO.

• DADO UM NÚMERO REAL x PODEMOS ESCREVÊ-LO COMO

$$x = x^+ - x^-, \text{ ONDE } x^+ = x \cdot [x > 0] \text{ E } x^- = -x \cdot [x < 0]$$

NOTE QUE $x^+ \geq 0$ E $x^- \geq 0$ MAS SEMPRE UM DELES É IGUAL A ZERO.

Nossa definição é

$$\sum_{k \in K} a_k = \sum_{k \in K} a_k^+ - \sum_{k \in K} a_k^-$$

JÁ SABEMOS RESOLVER ESSAS!

Δ NÃO SER QUE AS DUAS SOMAS SEJAM ∞