COEFICIENTES BINOMIAIS

$[r] = \{1, \dots, r\}$

$\binom{r}{k}$ = NÚMERO DE SUBCONJUNTOS DE TAMANHO k EM $[r]$

r → ÍNDICE SUPERIOR

k → ÍNDICE INFERIOR.

$r!$ = NÚMERO DE ORDENAÇÕES DE $[r]$

$$r^{\underline{k}} = \frac{r!}{(r-k)!} = r(r-1)(r-2)\cdots(r-k+1)$$

= NÚMERO DE SEQS COM k ELTS EM $[r]$

É ÚTIL QUE $\binom{r}{k}$ SEJA DEFINIDO P/ r REAL

$$\binom{r}{k} = \begin{cases} \dfrac{r^{\underline{k}}}{k!} & \text{SE } k \geq 0 \text{ INTEIRO} \\ 0 & \text{SE } k < 0 \end{cases}$$

→ É UM POLINÔMIO DE GRAU k EM r

$a_k r^k + a_{k-1} r^{k-1} + \cdots + a_0$

TRIÂNGULO DE PASCAL

n	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	$\binom{n}{5}$
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

OBS: $\binom{r}{0} = 1$ e $\binom{r}{1} = r$ $\binom{r}{2} = \frac{r(r-1)}{2}$

SIMETRIA

→ AS LINHAS SÃO SIMÉTRICAS

$$\binom{r}{k} = \binom{r}{r-k}$$ → EXCLUIR K ÍTENS

↳ ESCOLHER K ÍTENS

→ VALE QUANDO r É INTEIRO

$$\binom{r}{k} = \binom{r}{r-k}$$

ABSORÇÃO

$$\binom{r}{k} = \frac{r}{k}\binom{r-1}{k-1} \quad \text{SE } k \neq 0$$

$$\| $$

$$\frac{r^{\underline{k}}}{k!} = \frac{r}{k} \cdot \frac{(r-1)^{\underline{k-1}}}{(k-1)!} = \frac{r}{k}\binom{r-1}{k-1}$$

$$k\binom{r}{k} = r\binom{r-1}{k-1}$$

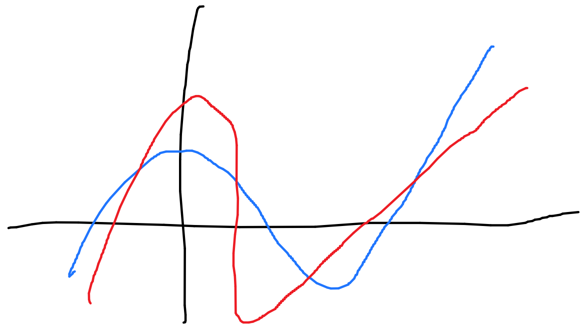
ALTERNATIVA: $k\binom{r}{k} = r\binom{r-1}{k-1}$

PROP: $(r-k)\binom{r}{k} = r\binom{r-1}{k}$ PARA r INTEIRO.

SIM: $\binom{r}{k}=\binom{r}{r-k}$

ABS: $k\binom{r}{k} = r\binom{r-1}{k-1}$

PROVA: $(r-k)\binom{r}{k} \underset{\text{SIMETRIA}}{=} (r-k)\binom{r}{r-k} \underset{\text{ABSORÇÃO}}{=} r\binom{r-1}{r-1-k} \underset{\text{SIMETRIA}}{=} r\binom{r-1}{k}$



OBS: VALE PARA TODO NÚMERO REAL

ARGUMENTO POLINOMIAL:

NOTE QUE $(r-k)\binom{r}{k}$ E $r\binom{r-1}{k}$ SÃO DOIS POLINÔMIOS

DE GRAU $k+1$. LOGO $P(r) = \underbrace{(r-k)\binom{r}{k}}_{P_1(r)} - \underbrace{r\binom{r-1}{k}}_{P_2(r)}$

É UM POLINÔMIO DE GRAU $k+1$

→ PORTANTO $P(r)$ POSSUI NO MÁXIMO $k+1$ RAÍZES OU $P(r)=0$

MAS NOTE QUE TODO INTEIRO É RAIZ DE $P(r)$. LOGO, $P(r)=0$

FÓRMULA DA ADIÇÃO

$$\binom{r}{k} = \binom{r-1}{k} + \binom{r-1}{k-1} \quad k \text{ INTEIRO}$$

→ COM O OVO

→ ARGUMENTO DO OVO PODRE

→ SEM O OVO

OBS: $\binom{r}{k} = \binom{r-1}{k} + \underbrace{\binom{r-1}{k-1}}$ → COEF. DE MENOR ÍNDICE INF

$$= \binom{r-1}{k} + \binom{r-2}{k-1} + \underbrace{\binom{r-2}{k-2}}$$

$$= \binom{r-1}{k} + \binom{r-2}{k-1} + \binom{r-3}{k-2} + \binom{r-3}{k-3}$$

$$\vdots$$

$$\binom{r}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{r-1-i}{k-i} \quad \text{DIR} \to \text{ESQ}$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \binom{r-1-k+i}{i} \quad \text{ESQ} \to \text{DIR}$$

$$r-1-k = A$$

$$\binom{A+k+1}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{A+i}{i}$$

$$\binom{r+1+k}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{r+i}{i}$$

→ $\sum_{k \leq m} \binom{r+k}{k} = \binom{r+m+1}{m} \quad m \text{ INTEIRO}$

SE EXPANDIRMOS O COEF DE MAIOR ÍNDICE INF.

→ $\sum_{0 \leq k \leq m} \binom{k}{m} = \binom{m+1}{m+1}$

COEFICIENTE BINOMIAL RECEBE ESTE NOME POR CAUSA
DO TEO BINOMIAL

$$(x+y)^0 = 1x^0y^0$$

$$(x+y)^1 = 1x^1y^0 + 1x^0y^1$$

$$(x+y)^2 = 1x^2y^0 + 2x^1y^1 + 1x^0y^2$$

$$(x+y)^m = \underbrace{(x+y) \quad \cdots \quad (x+y)}_{m \text{ vezes}}$$

$$x^a y^b \qquad a+b=m$$

O COEFICIENTE DE $x^J y^{m-J}$ É O NÚMERO DE FORMAS
DE ESCOLHER J FATORES $= \binom{m}{J}$.

TEOREMA BINOMIAL : $(x+y)^r = \sum_k \binom{r}{k} x^k y^{r-k}$ $\quad r$ INTEIRO $\quad r \geq 0$

COROLÁRIO : $2^r = \sum_k \binom{r}{k}$ $\quad$ TOMANDO $x=y=0$ $\quad$ (REGRA DA LINHA)

$$0^r = \sum_k \binom{r}{k} (-1)^k$$ TOMANDO $x=-1$, $y=0$