

# COEFICIENTES BINOMIAIS

$\{1, \dots, r\}$

$\binom{r}{k}$  = NÚMERO DE SUBCONJUNTOS DE TAMANHO  $k$  EM  $[r]$

→ ÍNDICE SUPERIOR

→ ÍNDICE INFERIOR.

$r!$  = NÚMERO DE ORDENAÇÕES DE  $[r]$

$$r^{\underline{k}} = \frac{r!}{(r-k)!} = r(r-1)(r-2) \dots (r-k+1)$$

= NÚMERO DE SEQS COM  $k$  ETS EM  $[r]$

É ÚTIL QUE  $\binom{r}{k}$  SEJA DEFINIDO  $\forall r \in \mathbb{R}$

$$\binom{r}{k} = \begin{cases} \frac{r^{\underline{k}}}{k!} & \text{se } k \geq 0 \text{ INTEIRO} \\ 0 & \text{se } k < 0 \end{cases}$$

→ É um POLINÔMIO DE GRAU  $k$  EM  $r$   
 $a_k r^k + a_{k-1} r^{k-1} + \dots + a_0$

# TRIÂNGULO DE PASCAL

| $n$ | $\binom{n}{0}$ | $\binom{n}{1}$ | $\binom{n}{2}$ | $\binom{n}{3}$ | $\binom{n}{4}$ | $\binom{n}{5}$ |
|-----|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| 0   | 1              |                |                |                |                |                |
| 1   | 1              | 1              |                |                |                |                |
| 2   | 1              | 2              | 1              |                |                |                |
| 3   | 1              | 3              | 3              | 1              |                |                |
| 4   | 1              | 4              | 6              | 4              | 1              |                |
| 5   | 1              | 5              | 10             | 10             | 5              | 1              |

OBS:  $\binom{r}{0} = 1$  e  $\binom{r}{1} = r$   $\binom{r}{2} = \frac{r(r-1)}{2}$

## SIMETRIA

~> AS LINHAS SÃO SIMÉTRICAS

$$\binom{r}{k} = \binom{r}{r-k} \rightarrow \text{EXCLUIR } k \text{ ÍTEMS}$$

↳ ESCOLHER  $k$  ÍTEMS

~> VALE QUANDO  $r$  É INTEIRO

## ABSORÇÃO

$$\binom{r}{k} = \frac{r}{k} \binom{r-1}{k-1} \quad \text{SE } k \neq 0$$

$$\stackrel{\parallel k}{\frac{r}{k!}} = \frac{r}{k} \cdot \frac{\binom{r-1}{k-1}}{(k-1)!} = \frac{r}{k} \binom{r-1}{k-1}$$

$$\text{ALTERNATIVA: } k \binom{r}{k} = r \binom{r-1}{k-1}$$

$$\binom{r}{k} = \binom{r}{r-k}$$

$$k \binom{r}{k} = r \binom{r-1}{k-1}$$

PROP:  $(r-k) \binom{r}{k} = r \binom{r-1}{k}$  PARA  $r$  INTEIRO.

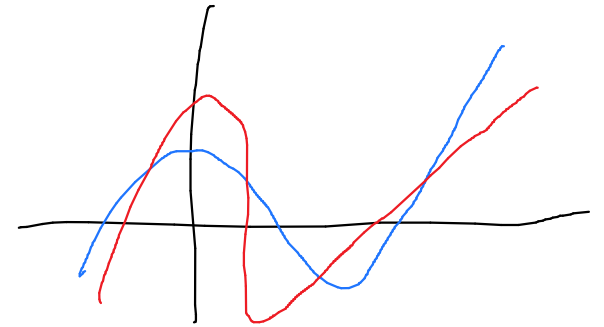
$$\text{SIM: } \binom{r}{k} = \binom{r}{r-k}$$

$$\text{ABS: } k \binom{r}{k} = r \binom{r-1}{k-1}$$

PROVA:  $(r-k) \binom{r}{k} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{SIMETRIA}}}{=} (r-k) \binom{r}{r-k} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ABSORÇÃO}}}{=} r \binom{r-1}{r-1-k} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{SIMETRIA}}}{=} r \binom{r-1}{k}$

OBS: VALE PARA TODO NÚMERO REAL

ARGUMENTO POLINOMIAL:



NOTE QUE  $(r-k) \binom{r}{k}$  E  $r \binom{r-1}{k}$  SÃO DOIS POLINÔMIOS

DE GRAU  $k+1$ . LOGO  $P(r) = \underbrace{(r-k) \binom{r}{k}}_{P_1(r)} - \underbrace{r \binom{r-1}{k}}_{P_2(r)}$

É UM POLINÔMIO DE GRAU  $k+1$

→ PORTANTO  $P(r)$  POSSUI NO MÁXIMO  $k+1$  RAÍZES OU  $P(r) = 0$

MAS NOTE QUE TODO INTEIRO É RAÍZ DE  $P(r)$ . LOGO,  $P(r) = 0$

# Fórmula da Adição

$$\binom{r}{k} = \binom{r-1}{k} + \binom{r-1}{k-1}$$

\* Com o ovo  
K INTEIRO

↳ ARGUMENTO DO OVO PODE  
↳ SEM O OVO

OBS:

$$\begin{aligned} \binom{r}{k} &= \binom{r-1}{k} + \binom{r-1}{k-1} \\ &= \binom{r-1}{k} + \binom{r-2}{k-1} + \binom{r-2}{k-2} \\ &= \binom{r-1}{k} + \binom{r-2}{k-1} + \binom{r-3}{k-2} + \binom{r-3}{k-3} \end{aligned}$$

COEF. DE  
MENOR ÍNDICE  
INF

$$\binom{r}{k} = \sum_{i=0}^k \binom{r-1-i}{k-i}$$

DIR → ESQ

$$= \sum_{i=0}^k \binom{r-1-k+i}{i}$$

ESQ → DIR

$r-1-k = A$

$$\binom{A+k+1}{k} = \sum_{i=0}^k \binom{A+i}{i}$$

$$\binom{r+1+k}{k} = \sum_{i=0}^k \binom{r+i}{i}$$

$$\sum_{k \leq n} \binom{r+k}{k} = \binom{r+n+1}{n}$$

n INTEIRO

SE EXPANDIRMOS O COEF DE MAIOR ÍNDICE INF.

$$\sum_{0 \leq k \leq n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$$

(REGRAS DA COLUNA?)

COEFICIENTE BINOMIAL RECEBE ESTE NOME POR CAUSA DO TEO BINOMIAL

$$(x+y)^0 = 1x^0y^0$$

$$(x+y)^1 = 1x^1y^0 + 1x^0y^1$$

$$(x+y)^2 = 1x^2y^0 + 2x^1y^1 + 1x^0y^2$$

$$(x+y)^m = \underbrace{(x+y) \cdots (x+y)}_{m \text{ vezes}}$$

$$x^a y^b \quad a+b=m$$

O COEFICIENTE DE  $x^j y^{m-j}$  É O NÚMERO DE FORMAS DE ESCOLHER  $j$  FATORES  $= \binom{m}{j}$ .

TEOREMA BINOMIAL :  $(x+y)^r = \sum_k \binom{r}{k} x^k y^{r-k}$   $r$  INTEIRO  $r \geq 0$

COROLÁRIO :  $2^r = \sum_k \binom{r}{k}$  TOMANDO  $x=y=1$  (REGRAS DA LINHA)

$0^r = \sum_k \binom{r}{k} (-1)^k$  TOMANDO  $x=-1, y=1$

PODEMOS ESCREVER

$$\binom{r}{k} = \frac{r!}{\underbrace{k!}_{a} \underbrace{(r-k)!}_{b}} \quad \text{como} \quad \frac{(a+b)!}{a! b!} \quad \text{ONDE} \quad a=k \quad \text{e} \quad b=r-k$$

SIMETRIA

$$\binom{n=a+b+c}{a} = \binom{n=a+b+c}{b+c}$$


---


$$\binom{n}{k} = \binom{n}{\underline{k, n-k}}$$

ANALOGAMENTE, PODEMOS ESCREVER

$$\frac{(a+b+c)!}{a! b! c!} = \frac{r!}{\underbrace{k!}_{a} \underbrace{(m-k)!}_{b} \underbrace{(r-m)!}_{c}}$$

TEOREMA TRINOMIAL

$$(x+y+z)^n = \sum_{\substack{0 \leq a, b, c \leq n \\ a+b+c=n}} \frac{(a+b+c)!}{a! b! c!} x^a y^b z^c = \sum_{\substack{0 \leq a, b, c \leq n \\ a+b+c=n}} \binom{a+b+c}{b+c} \binom{b+c}{c} x^a y^b z^c$$

$$\frac{(a+b+c)!}{\cancel{(b+c)!} a!} \cdot \frac{\cancel{(b+c)!}}{b! c!}$$



TRINÔMIO:

$$\binom{a+b+c}{a, b, c} = \frac{(a+b+c)!}{a! b! c!}$$

GENERALIZANDO:

$$\binom{a_1 + a_2 + \dots + a_m}{a_1, a_2, \dots, a_m} = \frac{(a_1 + \dots + a_m)!}{a_1! \dots a_m!}$$

$$t = m + n$$

# CONVOLUÇÃO DE VANDERMONDE

$$\binom{r+s}{m+n} = \sum_k \binom{r}{m+k} \binom{s}{n-k} = \sum_{\substack{a+b=t}} \binom{r}{a} \binom{s}{b}$$

↳ DE QUANTAS FORMAS  
EU POSSO ESCOLHER  $m+n$   
PESSOAS EM UM UNIVERSO  
DE  $r$  HOMENS E  $s$  MULHERES?

$$\binom{r+s}{t} = \sum_{a=0}^t \binom{r}{a} \binom{s}{t-a}$$

TRUQUE

$$\begin{aligned}
 r^{\frac{k}{2}} \left(r - \frac{1}{2}\right)^{\frac{k}{2}} &= r \cdot \left(r - \frac{1}{2}\right) \cdot (r-1) \cdot \left(r - \frac{3}{2}\right) \cdot (r-2) \cdot \dots \cdot (r-k+1) \cdot \left(r - k + 1 - \frac{1}{2}\right) \\
 &= \frac{1}{2^{2k}} (2r) (2r-1) (2r-2) (2r-3) (2r-4) \dots (2r-2k+2) (2r-2k+1) \\
 &= \frac{1}{2^{2k}} \cdot (2r)^{\frac{2k}{2}}
 \end{aligned}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n^{\frac{k}{2}}}{k!}$$

$$\boxed{n^{\frac{k}{2}} = \binom{n}{k} k!}$$

DIVIDINDO POR  $(k!)^2$

$$\frac{r^{\frac{k}{2}} \left(r - \frac{1}{2}\right)^{\frac{k}{2}}}{k! \cdot k!} = \frac{(2r)^{\frac{2k}{2}}}{2^{2k} (k!)^2} = \frac{1}{2^{2k}} \frac{(2r)^{\frac{2k}{2}}}{(2k)!} \frac{(2k)!}{(k!)^2} = \frac{1}{2^{2k}} \cdot \binom{2r}{2k} \binom{2k}{k}$$

$$\binom{r}{k} \binom{r - \frac{1}{2}}{k}$$

$$\binom{r}{k} \binom{r - \frac{1}{2}}{k} = \frac{1}{2^{2k}} \binom{2r}{2k} \binom{2k}{k}$$

$$\binom{r}{k} \binom{r-\frac{1}{2}}{k} = \frac{1}{2^{2k}} \binom{2r}{2k} \binom{2k}{k}$$

$$\binom{m-\frac{1}{2}}{n} = \frac{(m-\frac{1}{2})^{\underline{m}}}{n!} = (-1)^n \frac{(-\frac{1}{2})^{\underline{m}}}{n!}$$

Tomando  $k=r=n$

$$\binom{n}{n} \binom{n-\frac{1}{2}}{n} = \frac{1}{2^{2n}} \cdot \binom{2n}{2n} \binom{2n}{n}$$

$$= (-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n}$$

Logo, 
$$\binom{m-\frac{1}{2}}{n} = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n}$$

OBS: 
$$\binom{m-\frac{1}{2}}{n}^{\underline{m}} = (m-\frac{1}{2}) (m-\frac{3}{2}) \cdots (\frac{1}{2}) = \frac{1}{2^n} (2m-1)(2m-3) \cdots 1$$

$$= \frac{(-1)^n}{2^n} (-2m+1) (-2m+3) \cdots (-3) (-1)$$

$$= (-1)^n \left(-m + \frac{1}{2}\right) \left(-m + \frac{3}{2}\right) \cdots \underbrace{\left(-\frac{3}{2}\right)}_{-1} \underbrace{\left(-\frac{1}{2}\right)}_{-1}$$

$$= (-1)^n \left(-\frac{1}{2}\right)^{\underline{m}}$$

$$\text{ex: } \binom{4-\frac{1}{2}}{4} = \frac{(4-\frac{1}{2})(3-\frac{1}{2})(2-\frac{1}{2})(\frac{1}{2})}{4!} = \frac{\frac{7}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}}{4!} = \binom{-\frac{1}{2}}{4}$$

$$a) \binom{n-\frac{1}{2}}{n} = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} = (-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} \end{array} \right.$$

$$b) \binom{n-\frac{1}{2}}{n} = (-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n}$$

$$\binom{2n}{n} \binom{-\frac{1}{2}}{n} = \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \binom{2n}{n}$$

$$= \left(-\frac{1}{4}\right)^n \binom{2n}{n}$$

$$2^{2n} = 4^n$$

$$\text{ex: } \binom{4 - \frac{1}{2}}{4} = \frac{(4 - \frac{1}{2})(3 - \frac{1}{2})(2 - \frac{1}{2})(\frac{1}{2})}{4!} = \frac{\left(\frac{7}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}{4!} = \left(-\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{4!}$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)^4 \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{\frac{2}{2} \cdot \frac{4}{2} \cdot \frac{6}{2} \cdot \frac{8}{2}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \underbrace{\left(-\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^4}_{\left(-\frac{1}{4}\right)^4} \cdot \frac{8!}{4! \cdot 4!}$$

$$= \left(-\frac{1}{4}\right)^4 \cdot \binom{8}{4}$$

LEMBRANDO :  $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$

APLICANDO NOVAMENTE

$$\begin{aligned}\Delta^2 f(x) &= \Delta (f(x+1) - f(x)) \\ &= f(x+2) - f(x+1) - f(x+1) + f(x) \\ &= f(x+2) - 2f(x+1) + f(x)\end{aligned}$$

CONTINUANDO :

$$\begin{aligned}\Delta^3 f(x) &= f(x+3) - 2f(x+2) + f(x+1) - (f(x+2) - 2f(x+1) + f(x)) \\ &= f(x+3) - 3f(x+2) + 3f(x+1) - f(x)\end{aligned}$$

$$\Delta^3 f(x) = f(x+3) - 3f(x+2) + 3f(x+1) - f(x)$$

$$\Delta^4 f(x) = f(x+4) - 4f(x+3) + 6f(x+2) - 4f(x+1) + f(x)$$

o CASO GERAL FICA

$$\Delta^n f(x) = \sum_k \binom{n}{k} (-1)^{n-k} f(x+k) = \sum_k \binom{n}{k} (-1)^{n-k} E^k f(x)$$

$$\Delta^n = (E-1)^n = \sum_k \binom{n}{k} (-1)^{n-k} E^k$$

LEMBRE-SE:  $E f(x) = f(x+1)$ .

PODEMOS PENSAR

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x) = E f(x) - f(x)$$

$$\Delta = E - 1$$



# FUNÇÕES GERADORAS

- GOSTARÍAMOS DE REPRESENTAR A SÉRIE INFINITA  $(a_0, a_1, \dots)$  POR UMA SÉRIE DE POTÊNCIAS.

$$A(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots = \sum_{k \geq 0} a_k z^k$$

↳ FUNÇÃO GERADORA P/  $(a_0, a_1, \dots)$

- SE  $A(z)$  É UMA SÉRIE DE POTÊNCIAS, USAMOS  $[z^m] A(z) = a_m$
- SE  $A(z)$  E  $B(z)$  SÃO FUNÇÕES GERADORAS PARA  $(a_0, a_1, \dots)$  E  $(b_0, b_1, \dots)$

CONSIDERE  $A(z) \cdot B(z) = (a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots)(b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots)$

O COEF. DE  $z^m$  EM  $A(z) \cdot B(z)$  É  $a_0 b_m + a_1 b_{m-1} + a_2 b_{m-2} + \dots + a_m b_0$

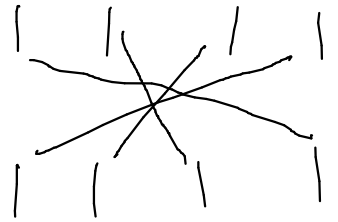
$$= \sum_{k=0}^m a_k b_{m-k}$$

↳ CONVOLUÇÃO DAS SEQUÊNCIAS

EX: A FUNÇÃO GERADORA DE  $(1, 1, 1, \dots)$  É

$$f(z) = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots = 1 + z f(z)$$

LOGO, TEMOS  $f(z) = \frac{1}{1-z}$



EX: QUEM É A SEQUÊNCIA GERADA POR  $\left(\frac{1}{1-z}\right)^2$ ?

VIMOS QUE  $[z^n] A(z) \cdot B(z) = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$

$$\text{LOGO } [z^n] \left(\frac{1}{1-z}\right)^2 = [z^n] \left(\frac{1}{1-z}\right) \left(\frac{1}{1-z}\right) = \sum_{k=0}^n 1 \cdot 1 = n+1$$

E PORTANTO, TEMOS  $\left(\frac{1}{1-z}\right)^2 = 1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + \dots$

4

EX: A SEQUÊNCIA GERADA POR

$$(1+z)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1 \cdot z^k = \binom{n}{0} \cdot z^0 + \binom{n}{1} z^1 + \binom{n}{2} z^2 + \dots + \binom{n}{n} z^n + 0 + \dots$$

$$\in \left( \binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}, 0, 0, \dots \right) \quad \binom{n}{r}$$

$$(1+z)^r \text{ GERA } \left( \binom{r}{0}, \binom{r}{1}, \dots \right)$$

$$(1+z)^s \text{ GERA } \left( \binom{s}{0}, \binom{s}{1}, \dots \right)$$

$$\sum_{k=0}^{r+s} \binom{r+s}{k} z^k = (1+z)^{r+s} = \underline{(1+z)^r} \underline{(1+z)^s} = \sum_k \left( \sum_{t=0}^k \binom{r}{t} \binom{s}{k-t} \right) z^k$$

CONVOLUÇÃO DE VANDERMONDE

CONCLUÍMOS QUE

$$\binom{r+s}{k} = [z^k] (1+z)^{r+s} = \sum_{t=0}^k \binom{r}{t} \binom{s}{k-t}$$

EX: A SEQ. GENERATED FOR

$$(1-z)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k z^k$$

$$= \left( \binom{n}{0}, -\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, -\binom{n}{3}, \dots, 0, \dots \right)$$

# O TEOREMA CHINÊS DO RESTO

FIXADOS  $m_1, m_2, \dots, m_k$   $m_i \perp m_k$  PARA TODO  $i \neq j$ , E TOMA  $m = m_1 \cdots m_k$

DADOS  $x_1, \dots, x_k$ , EXISTE UM ÚNICO  $x \in \{0, \dots, m-1\}$  T.q.

$$x \equiv x_i \pmod{m_i} \quad \forall i$$

PROVA: PARA CADA  $i$  SEJA  $M_i = \prod_{j \neq i} m_j$  OBSERVE QUE  $m_i \cdot M_i = m \equiv 0 \pmod{m}$

COMO  $m_i \perp m_j \quad \forall j \neq i$ , ENTÃO EXISTE  $a_i$  T.q.  $M_i \cdot a_i \equiv 1 \pmod{m_i}$   
TOMA  $x = x_1 \cdot M_1 \cdot a_1 + x_2 \cdot M_2 \cdot a_2 + \dots + x_k \cdot M_k \cdot a_k = \sum x_i \cdot M_i \cdot a_i$

NOTE QUE  $x \equiv x_i \cdot M_i \cdot a_i \equiv x_i \pmod{m_i}$ . ISSO PROVA A EXISTÊNCIA.

SUPONHA QUE HÁ'  $x$  E  $y$  T.q.  $x, y \equiv x_i \pmod{m_i} \quad \forall i$

LOGO,  $x \equiv y \pmod{m_i}$ , O QUE IMPLICA  $x - y \equiv 0 \pmod{m_i}$ .

LOGO,  $x - y$  É MÚLTIPLO DE  $m_i \quad \forall i$ . ENTÃO  $x - y$  É MÚLTIPLO DE  $m$ .

PORTANTO  $x \equiv y \pmod{m}$ . ISSO PROVA A UNICIDADE.

$$\text{Ex: } m_1 = 2 \quad m_2 = 5 \quad m = 10$$

$$(1, 2)$$

$$M_1 = 5$$

$$a_1 = 1$$

$$M_2 = 2$$

$$a_2 = 3$$

$$\left\{ \right.$$

$$x = 1 \cdot 5 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 3 = 5 + 12 = 17$$

$$\downarrow$$

$$7$$

$$27$$

EX:  $(1-z)^r$  é a func. ger. de  $\left(\binom{r}{0}, -\binom{r}{1}, \binom{r}{2}, \dots\right)$   
 $(1+z)^r$  é a func. ger. de  $\left(\binom{r}{0}, \binom{r}{1}, \binom{r}{2}, \dots\right)$

TEMOS QUE  $(1-z)^r(1+z)^r = ((1-z)(1+z))^r$   
 $= (1-z^2)^r$  NÃO POSSUI COEFICIENTE  
COM EXPOENTE ÍMPAR

$$= \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} (-1)^{r-k} \underbrace{\left(z^2\right)^k}_{z^{2k}}$$

PROP:  $\frac{1}{(1-z)^n} = \sum_{k \geq 0} \binom{n+k}{n-1} z^k$

PROVA: INDUÇÃO EM  $n$

BASE:  $\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots = \sum_{k \geq 0} z^k = \sum_{k \geq 0} \binom{k+1}{0} z^k$

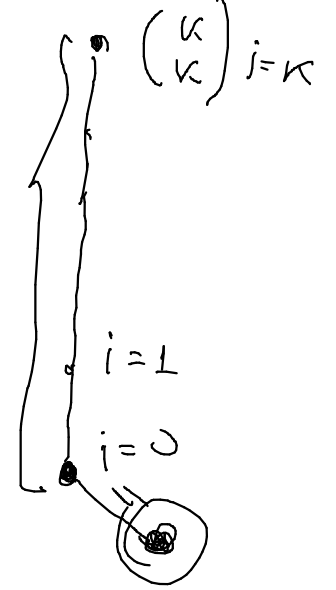
HI: SUPONHA QUE  $\frac{1}{(1-z)^{n-1}} = \sum_{k \geq 0} \binom{n+k-1}{n-2} z^k$

PASSO INDUTIVO:

TEMOS  $\frac{1}{(1-z)^n} = \frac{1}{(1-z)^{n-1}} \cdot \frac{1}{1-z} = \left( \sum_{k \geq 0} \binom{n+k-1}{n-2} z^k \right) (1 + z + z^2 + \dots)$

$= a_0 z^0 + a_1 z^1 + \dots$

$a_k = \binom{n+k-1}{n-2} + \binom{n+k-2}{n-2} + \binom{n+k-3}{n-2} + \dots = \sum_{i \geq 0} \binom{n+k-i}{n-2} = \binom{n+k}{n-1} \quad \square$





$$\frac{1}{(1-z)^{n+1}} = \sum_{k \geq 0} \binom{n+k+1}{n} z^k = \binom{n+1}{n} + \binom{n+2}{n} z + \binom{n+3}{n} z^2 + \dots$$

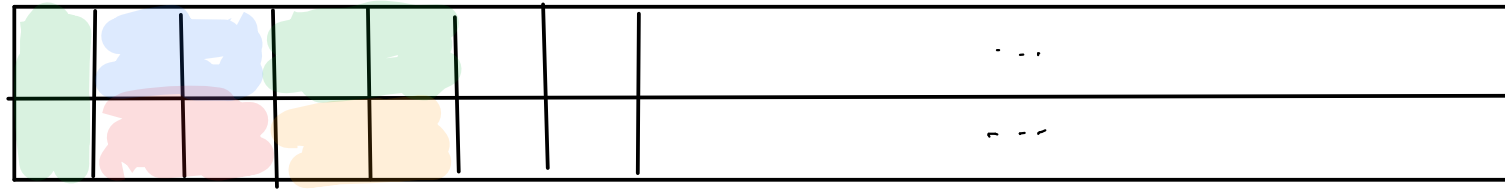
$$\frac{z^{n+1}}{(1-z)^{n+1}} = \sum_{k \geq 0} \binom{n+k+1}{n} z^{k+n+1} = \binom{n+1}{n} z^{n+1} + \binom{n+2}{n} z^{n+2} + \binom{n+3}{n} z^{n+3} + \dots$$

$$= \sum_{k \geq 0} \binom{k}{n} z^k$$

Em particular, se  $A(z)$  é a função geradora de  $a_0, a_1, \dots$

então  $\frac{A(z)}{1-z}$  é a função geradora das somas parciais.

CONSIDERE UM RETÂNGULO  $R(n)$  DE TAMANHO  $2 \times n$



~> DE QUANTAS FORMAS POSSO PARTICIONAR  $R(n)$  EM DOMINÓS?



~> LADRILAGEM

EX:  $R(0)$  NÃO HÁ O QUE FAZER, HÁ UMA ÚNICA FORMA: NÃO COLOCAR NADA

$R(1)$  : UM ÚNICO DOMINÓ NA VERTICAL

$R(2)$  : DUAS FORMAS



$R(3)$  :



IDEIA: TODA CONFIGURAÇÃO COMEÇA POR  $\square$  OU  $\begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix}$

LOGO, O NÚMERO  $T_n$  DE CONFS. É DADO POR

$$\underline{T_n = T_{n-1} + T_{n-2}}$$

$\Rightarrow$  IGUAL AOS NÚMEROS DE FIBONACCI

IDEIA 2: "SOMAR" LADRILHAGENS

SOMA FORMAL, A MULTIPLICAÇÃO É A CONCATENAÇÃO NÃO-COMUTATIVA

COMUTATIVO:  
 $a \cdot b = b \cdot a$

$\hookrightarrow \underbrace{\begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix}} \neq \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix}$

$2 \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix}$

$$T = \overset{T(0)}{1} + \square + \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix} \square & \square \end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix} \square \\ \square & \square \end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix} + \dots$$

$$= 1 + \square \left( 1 + \square + \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix} \square & \square \end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix} \square \\ \square & \square \end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix} + \dots \right) \\ + \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} \left( 1 + \square + \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix} \square & \square \end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix} \square \\ \square & \square \end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix} + \dots \right)$$

$$= 1 + \square \cdot T + \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} \cdot T$$

IDEIA 2: "SOMAR" LADRILHAGENS

SOMA FORMAL, A MULTIPLICAÇÃO É A CONCATENAÇÃO NÃO-COMUTATIVA

$$T = \underset{R(0)}{1} + \underset{z}{\boxed{\phantom{0}}} + \underset{z^2}{\boxed{\phantom{0}}\boxed{\phantom{0}}} + \underset{z^2}{\boxed{\phantom{0}}\boxed{\phantom{0}}} + \underset{z^3}{\boxed{\phantom{0}}\boxed{\phantom{0}}\boxed{\phantom{0}}} + \underset{z^3}{\boxed{\phantom{0}}\boxed{\phantom{0}}\boxed{\phantom{0}}} + \dots$$

$$\hookrightarrow \boxed{\phantom{0}}\boxed{\phantom{0}} \neq \boxed{\phantom{0}}\boxed{\phantom{0}}$$

$$2 \boxed{\phantom{0}}\boxed{\phantom{0}}$$

$$= 1 + \boxed{\phantom{0}} \left( 1 + \boxed{\phantom{0}} + \boxed{\phantom{0}}\boxed{\phantom{0}} + \boxed{\phantom{0}}\boxed{\phantom{0}} + \boxed{\phantom{0}}\boxed{\phantom{0}}\boxed{\phantom{0}} + \boxed{\phantom{0}}\boxed{\phantom{0}}\boxed{\phantom{0}} + \dots \right) + \boxed{\phantom{0}}\boxed{\phantom{0}} \left( 1 + \boxed{\phantom{0}} + \boxed{\phantom{0}}\boxed{\phantom{0}} + \boxed{\phantom{0}}\boxed{\phantom{0}} + \boxed{\phantom{0}}\boxed{\phantom{0}}\boxed{\phantom{0}} + \boxed{\phantom{0}}\boxed{\phantom{0}}\boxed{\phantom{0}} + \dots \right)$$

$$= 1 + \boxed{\phantom{0}} \cdot T + \boxed{\phantom{0}}\boxed{\phantom{0}} \cdot T$$

$$\text{Logo } (1 - \boxed{\phantom{0}} - \boxed{\phantom{0}}\boxed{\phantom{0}}) T = 1 \quad \leadsto \quad T = \frac{1}{1 - \boxed{\phantom{0}} - \boxed{\phantom{0}}\boxed{\phantom{0}}}$$

SE TROCAMOS  $\boxed{\phantom{0}}$  POR  $z$  E  $\boxed{\phantom{0}}\boxed{\phantom{0}}$  POR  $z^2$ , OBTENHO

$$T(z) = \frac{1}{1 - z - z^2}$$

$$\text{NOTE QUE } R(n) = [z^n] T(z)$$

AGORA QUEREMOS RESOLVER  $T(z) = \frac{1}{1-z-z^2}$

NOTE QUE  $\frac{1}{1-x} = \sum_{k \geq 0} x^k$ . SUBSTITUINDO  $x$  POR  $z+z^2$ , OBTÊMOS

$$T(z) = \sum_{k \geq 0} (z+z^2)^k \stackrel{\text{TEO BIN.}}{=} \sum_{k \geq 0} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} z^j z^{k-j}$$

## TROCO

UTILIZAMOS MOEDAS 1, 5, 10, 25, 50. DE QUANTAS FORMAS PODEMOS

DAR UM TROCO?

~ A ORDEM DAS MOEDAS NÃO IMPORTA.

TROCO APENAS COM MOEDAS DE 1

$$P = \emptyset + \textcircled{1} + \textcircled{1}\textcircled{1} + \textcircled{1}\textcircled{1}\textcircled{1}$$

USANDO MOEDAS DE 1 E 5

$$N = P + \textcircled{5}P + \textcircled{5}^2P + \dots = (\emptyset + \textcircled{5} + \textcircled{5}^2 + \dots) \cdot P$$

NO FINAL DAS CONTAS, OS TROCOS POSSÍVEIS SÃO

$$C = (\emptyset + \textcircled{50} + \textcircled{50}^2 + \dots) (\emptyset + \textcircled{25} + \textcircled{25}^2 + \dots) \cdot \dots \cdot (\emptyset + \textcircled{1} + \textcircled{1}^2 + \dots)$$

$$C = (\emptyset + \textcircled{50} + \textcircled{50}^2 + \dots) (\emptyset + \textcircled{25} + \textcircled{25}^2 + \dots) \cdot \dots \cdot (\emptyset + \textcircled{1} + \textcircled{1}^2 + \dots)$$

SUBSTITUINDO  $\textcircled{50}$  POR  $z^{50}$ ,  $\textcircled{25}$  POR  $z^{25}$ ,  $\dots$

O TRACO DE  $n$  É PRECISAMENTE O COEFICIENTE DE  $z^n$

ASSIM, COMO  $\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots$ , TEMOS

$$C(z) = \frac{1}{1-z^{50}} \cdot \frac{1}{1-z^{25}} \cdot \frac{1}{1-z^{10}} \cdot \frac{1}{1-z^5} \cdot \frac{1}{1-z}$$

$\leadsto$  NÚMERO DE PARTIÇÕES

DADA FUNÇÃO GERADORA

$$\underline{\underline{A(z)}} = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \underline{\underline{a_3}} z^3 + \dots$$

NOTE QUE

$$A(0) = a_0$$

$$A'(z) = a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \dots$$

$$\Rightarrow A'(0) = a_1$$

$$A''(0) = 2a_2$$

$$A'''(0) = 6a_3$$

;

$$A^{(n)}(0) = n! a_n$$



HÁ DOIS TIPOS DE FORMA FECHADA :  $G(z) = \sum g_n z^n$

- a) UMA EQUAÇÃO PARA  $G(z)$   
b) UMA EQUAÇÃO PARA  $g_n$
- } "DUALIDADE"

LEMBRE-SE QUE UMA SÉRIE  $\sum g_n z^n$  CONVERGE (ABSOLUTAMENTE) SE E SÓ SE  
EXISTE UMA CONSTANTE  $A$  T.q.  $\sum_{k=0}^r |g_k z^k| \leq A \quad \forall r$

LOGO, COMO  $G(0) = g_0$ , EXISTE  $z_0$  T.q.  $G(z)$  CONVERGE  $\forall z \leq z_0$

## PROPRIEDADES

$F(z)$  e  $G(z)$  SÃO FUNC. GERADORAS DE  $\langle f_n \rangle$  e  $\langle g_n \rangle$

• COMBINAÇÃO LINEAR: SEJAM  $\alpha$  e  $\beta$  CONSTANTES

$$\Rightarrow \alpha F(z) + \beta G(z) = \alpha \sum f_n z^n + \beta \cdot \sum g_n z^n = \sum (\alpha f_n + \beta g_n) z^n$$

É A FUNÇÃO GERADORA DE  $\langle \alpha f_n + \beta g_n \rangle$

• DESLOCAMENTO:

$$\Rightarrow z^m G(z) = \sum_{n \geq 0} g_n z^{n+m} = \sum_{n \geq 0} g_{n-m} z^n$$

$\Rightarrow$  TEMOS QUE PENSAR

$$\text{QUE } g_{-1} = g_{-2} = \dots = 0$$

É A FUNÇÃO GERADORA DE  $\langle \underbrace{0, 0, 0, \dots, 0}_m, g_0, g_1, \dots \rangle$

$$\frac{G(z) - g_0 - \dots - g_{m-1} z^{m-1}}{z^m} = \frac{g_m z^m + g_{m+1} z^{m+1} + \dots}{z^m} = g_m + g_{m+1} z + \dots$$

$$\Rightarrow \frac{G(z) - g_0 - g_1 z - g_2 z^2 - \dots - g_{m-1} z^{m-1}}{z^m} = \sum_{n \geq m} g_n z^{n-m} = \sum_{n \geq 0} g_{n+m} z^n$$

• SUBSTITUIR  $z$  POR  $Cz$

$$\leadsto G(Cz) = \sum g_n (Cz)^n = \sum (g_n C^n) z^n$$

É A FUNC. GER. DE  $\langle C^n g_n \rangle$  (JÁ VIMOS COM  $C = -1$ )

• DERIVAÇÃO

$$\leadsto G'(z) = \sum_{n \geq 0} n g_n z^{n-1} = \sum_{n \geq 0} (n+1) g_{n+1} z^n$$

É A FUNC. GER. DE  $\langle (n+1) g_{n+1} \rangle$

## • INTEGRAÇÃO

$$\leadsto \int_0^z G(t) dt = g_0 z + \frac{g_1 z^2}{2} + \frac{g_2 z^3}{3} + \dots = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} g_{n-1} z^n$$

É A FUNC. GER. DE  $\langle g_{n-1}/n \rangle$

OBS: SE QUEREMOS A FUNC. GER. DE  $\langle g_n/n \rangle$ , DEVEMOS DESLOCAR:  
 PARA ESQ. TROCANDO  $G(t)$  POR  $\frac{G(t) - g_0}{t}$  NA INTEGRAL

## • MULTIPLICAÇÃO

$$F(z) \cdot G(z) = \sum_{n \geq 0} \left( \sum_{k \geq 0} f_k g_{n-k} \right) z^n$$

É A FUNC. GER. DE  $\langle \sum_{k \geq 0} f_k g_{n-k} \rangle$

## Relações de Recorrência

• Suponha que  $\langle g_m \rangle$  seja dada por uma relação de recorrência

MA GOSTARÍAMOS DE ENCONTRAR UMA FÓRMULA ?/  $g_m$  EM FUNÇÃO DE  $m$

### ESTRATÉGIA

1. ESCREVER FÓRMULA GERAL
2. MULTIPLICAR POR  $z^m$
3. SOMAR SOBRE  $m \Rightarrow$  OBTENDO  $G(z)$  EM VÁRIOS LUGARES
4. SIMPLIFICAR PARA OBTER UMA FUNÇÃO DE  $G(z)$ .

EX: FIBONACCI

$$g_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \leq 0 \\ 1 & \text{se } n = 1 \\ g_{n-1} + g_{n-2} & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$$

1. Fórmula Geral  $g_n = g_{n-1} + g_{n-2} + [n=1]$

2. Multiplica por  $z^n$ :

$$z^n g_n = z^n g_{n-1} + z^n g_{n-2} + z^n [n=1]$$

3 Somar sobre  $n$

$$\underbrace{\sum_n z^n g_n}_{G(z)} = \underbrace{\sum_n z^n g_{n-1}}_{z G(z)} + \underbrace{\sum_n z^n g_{n-2}}_{z^2 G(z)} + \underbrace{\sum_n z^n [n=1]}_z$$

$$\Rightarrow G(z) = z G(z) + z^2 G(z) + z \quad \Rightarrow G(z) = \frac{z}{1 - z - z^2}$$

# TEOREMA DA EXPANSÃO RACIONAL:

OBSERVE QUE AS RAÍZES DE Q  
SÃO  $\frac{1}{p_1}, \frac{1}{p_2}, \dots$

SEJA  $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ , EM QUE  $Q(z) = q_0 (1 - p_1 z) (1 - p_2 z) \dots (1 - p_l z)$

COM  $p_i \neq p_j$  E  $P(z)$  FOR UM POLINÔMIO DE GRAU MENOR QUE  $l$ . ENTÃO

$$[z^n] R(z) = a_1 \cdot p_1^n + a_2 \cdot p_2^n + \dots + a_l p_l^n, \text{ EM QUE } a_k = -p_k \frac{P\left(\frac{1}{p_k}\right)}{Q'\left(\frac{1}{p_k}\right)}$$

EX: FIBONACCI  $G(z) = \frac{z}{1-z-z^2} \left\{ \begin{array}{l} P(z) \\ Q(z) \end{array} \right.$

RAÍZES DE  $Q(z)$ :  $a=1, b=-1, c=-1$ ,  $\Delta = 1+4=5$   $Q'(z) = -1-2z$

$$\phi = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{E} \quad \hat{\phi} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

EM PARTICULAR,  $Q(z) = (z - \phi) (z - \hat{\phi}) \cdot q'_0 = \left( z \cdot \frac{1}{\phi} - 1 \right) \left( z \cdot \frac{1}{\hat{\phi}} - 1 \right) \cdot \underbrace{q_0 \cdot \hat{\phi} \cdot \phi \cdot q'_0}_{1}$

$$a_1 = -p_1 \frac{P(1/p_1)}{Q'(1/p_1)}$$

$$= -\frac{1}{\cancel{\phi}} \cdot \frac{\cancel{\phi}}{-1-2\phi} = \frac{1}{1+2\phi}$$

$$= \frac{1}{2-\sqrt{5}}$$

$$a_2 = -p_2 \frac{P(1/p_2)}{Q'(1/p_2)} = -\frac{1}{\hat{\phi}} \frac{\hat{\phi}}{-1-2\hat{\phi}} = \frac{1}{2+\sqrt{5}}$$

$$f_n = a_1 \left(\frac{1}{\phi}\right)^n + a_2 \left(\frac{1}{\hat{\phi}}\right)^n = \frac{1}{\sqrt{5}} \phi^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \hat{\phi}^n$$

$$[z^n]Q(z) = a_1 \cdot p_1^n + a_2 \cdot p_2^n + \dots + a_k \cdot p_k^n, \text{ em } a_k = -p_k \frac{P(1/p_k)}{Q'(1/p_k)}$$

ex. Fibonacci  $G(z) = \frac{z}{1-z-z^2} \} P(z)$

raízes de  $Q(z)$ :  $a=1, b=-1, c=-1, \Delta=1+4=5$   $Q'(z)=-1-2z$

$$\phi = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad \hat{\phi} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

em particular,  $Q(z) = (z-\phi)(z-\hat{\phi}) \cdot q_0' = (z \cdot \frac{1}{\phi} - 1)(z \cdot \frac{1}{\hat{\phi}} - 1) \cdot \underbrace{\phi \cdot \hat{\phi} \cdot q_0'}_{q_0}$

$$[z^n]Q(z) = a_1 \cdot p_1^n + a_2 \cdot p_2^n$$

$$a_1 = -\cancel{p_1} \cdot \frac{\cancel{P(1/p_1)}}{Q'(1/p_1)} = \frac{-1}{-1-2/p_1} = \frac{p_1}{p_1+2}$$



EX: SEQUÊNCIAS SIMULTANEAMENTE RECURSIVAS

$$u_0 = 1$$

$$u_1 = 0$$

$$u_n = 2v_{n-1} + u_{n-2}$$

$$v_0 = 0$$

$$v_1 = 1$$

$$v_n = u_{n-1} + v_{n-2}$$

$$n \geq 2$$

1) ACHAR EQS ABSOLUTAS

$$u_n = 2v_{n-1} + u_{n-2} + [n=0]$$

$$v_n = u_{n-1} + v_{n-2}$$

2) MULTIPLICAR POR  $z^n$

$$z^n u_n = 2z \cdot z^{n-1} v_{n-1} + z^2 \cdot z^{n-2} u_{n-2} + z^n [n=0]$$

$$z^n v_n = 2z \cdot z^{n-1} u_{n-1} + z^2 \cdot z^{n-2} v_{n-2}$$

$$z^n u_n = z z \cdot z^{n-1} v_{n-1} + z^2 \cdot z^{n-2} u_{n-2} + \underbrace{z^n [n=0]}$$

$$z^n v_n = z \cdot z^{n-1} u_{n-1} + z^2 \cdot z^{n-2} v_{n-2}$$

3) Somatórios

$$u(z) = z z \cdot v(z) + z^2 u(z) + 1$$

$$v(z) = z u(z) + z^2 v(z)$$

$$\Rightarrow u(z) = \frac{(1-z^2) z z v(z) + 1}{1-z^2}$$

$$\Rightarrow v(z) = \frac{z}{1-z^2} u(z)$$

SUBSTITUINDO

$$z z v(z) + 1 = (1-z^2) u(z) = \frac{(1-z^2)^2}{z} v(z) \Rightarrow v(z) = \frac{z}{(1-z^2)^2 - z z^2}$$

$$u(z) = \frac{(1-z^2) v(z)}{z} = \frac{(1-z^2)}{1-4z^2+z^4} = (1-z^2) W(z^2) = \frac{z}{1-4z^2+z^4}$$

$$\text{EM QUE } W(x) = \frac{1}{1-4x+x^2} \begin{matrix} \nearrow 2+\sqrt{3} \\ \searrow 2-\sqrt{3} \end{matrix} = \underline{z W(z^2)}$$

$$z z V(z) + 1 = (1-z^2) u(z) = \frac{(1-z^2)^2}{z} V(z) \Rightarrow V(z) = \frac{z}{(1-z^2)^2 - z z^2}$$

$$u(z) = \frac{(1-z^2) V(z)}{z} = \frac{(1-z^2)}{1-4z^2+z^4} = (1-z^2) W(z^2) = \frac{z}{1-4z^2+z^4}$$

$$\text{EM } a_n \in \mathbb{C} \quad W(x) = \frac{1}{1-4x+x^2} \quad \begin{matrix} \nearrow 2+\sqrt{3} \\ \nwarrow 2-\sqrt{3} \end{matrix} \quad = \frac{z}{1-4z^2+z^4} = \underline{z W(z^2)}$$

$$u(z) = (1-z^2) W(z^2)$$

$$V(z) = z W(z^2)$$

$$W(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

$$V_{2m+1} = W_m = \frac{3+2\sqrt{3}}{6} (2+\sqrt{3})^m + \frac{3-2\sqrt{3}}{6} (2-\sqrt{3})^m \quad W(z^2) = a_0 + a_1 z^2 + a_2 z^4 + \dots$$

$$V(z) = z W(z^2) = a_0 z + \underline{a_1} z^3 + \underline{a_2} z^5 + \dots$$

$$U_{2m} = W_m - W_{m-1}$$

$$= \frac{(2+\sqrt{3})^m}{3-\sqrt{3}} + \frac{(2-\sqrt{3})^m}{3+\sqrt{3}}$$

$$W(z^2) = a_0 + a_1 z^2 + a_2 z^4 + \dots$$

$$-z^2 W(z^2) = -a_0 z^2 - a_1 z^4 - a_2 z^6 + \dots$$

$$(1-z^2) W(z^2) = a_0 + (a_1 - a_0) z^2 + (a_2 - a_1) z^4 + \dots$$

# CONVOLUÇÕES E RELAÇÕES DE RECORRÊNCIA

• DADA UMA SEQ.  $X_0, \dots, X_m$

DE QUANTAS FORMAS PODEMOS CALCULAR O PRODUTO

$$X_0 \cdot X_1 \cdots X_m$$

• DE QUANTAS FORMAS POSSO ESCOLHER PARÊNTESES  
PARA TER APENAS OPERAÇÕES BINÁRIAS.

EX:  $X_0 \cdot X_1$  : UMA ÚNICA FORMA

$(X_0 \cdot X_1) \cdot X_2$      $X_0 \cdot (X_1 \cdot X_2)$  : DUAS FORMAS

$X_0 \cdot (X_1 (X_2 \cdot X_3))$  ,  $X_0 \cdot ((X_1 \cdot X_2) X_3)$  ,  $(X_0 X_1) \cdot (X_2 X_3)$  ,  $(X_0 (X_1 X_2)) \cdot X_3$   
 $((X_0 X_1) X_2) \cdot X_3$

$$C_1 = 1, \quad C_2 = 2, \quad C_3 = 5$$

- A ÚLTIMA MULTIPLICAÇÃO DIVIDE A SEQUÊNCIA EM DUAS

$$\underbrace{(x_0 \dots x_k)}_{k+1} \cdot \underbrace{(x_{k+1} \dots x_n)}_{n-k}$$

- FIXADA ESSA MULTIPLICAÇÃO, DENTRO DOS PARÊNTESES PODEMOS FAZER DE  $C_k$  E  $C_{n-k-1}$  FORMAS

- logo  $C_n = C_0 \cdot C_{n-1} + C_1 \cdot C_{n-2} + \dots + C_{n-1} \cdot C_0$  SE  $n > 0$

$$C_n = \sum_k C_k \cdot C_{n-1-k} + [n=0]$$

$$\begin{aligned} C(z) &= \sum_n z^n C_n = \sum_n \sum_k z^n C_k \cdot C_{n-1-k} + 1 \\ &= \sum_k \sum_n z^n C_k \cdot C_{n-1-k} + 1 = \sum_k z^k C_k \cdot \sum_n z^{n-k} C_{n-1-k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C(z) = \sum_n z^n C_n &= \sum_n \sum_k z^n C_k \cdot C_{n-1-k} + 1 \\
 &= \sum_k \sum_n z^n C_k \cdot C_{n-1-k} + 1 = \left( \sum_k z^k C_k \right) \cdot z \cdot \sum_n z^{n-k-1} C_{n-1-k} + 1
 \end{aligned}$$

$$= C(z) \cdot z \cdot C(z) + 1$$

$$\text{Logo, } zC(z)^2 - C(z) + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad C(z) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4z}}{2z}$$

Há duas soluções :  $\left( -\sqrt{1-4z} \right)' = -\frac{1}{2} \cdot \frac{-4}{\sqrt{1-4z}}$

$$\lim_{z \rightarrow 0} \left. \frac{1 + \sqrt{1-4z}}{2z} \right\}_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 2}} = 0$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1-4z}}{2z} = 1$$

$$C(z) = \frac{1 - \sqrt{1-4z}}{2z}$$

TEO BIN.

$$(x+y)^n = \sum_k \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

$$\sqrt{1-4z} = (1-4z)^{1/2} = \sum_{k \geq 0} \binom{1/2}{k} (-4z)^k$$

ABSORÇÃO

$$\downarrow$$

$$= 1 + \sum_{k \geq 1} \frac{1}{2k} \binom{-1/2}{k-1} (-4z)^k$$

Logo,

$$\frac{1 - \sqrt{1-4z}}{2z} = \sum \binom{2m}{m} \frac{z^m}{m+1}$$

$$\binom{-1/2}{m} = \left(-\frac{1}{4}\right)^m \binom{2m}{m}$$

$$\frac{x^2-1}{x} = \frac{x^2}{x} - \frac{1}{x} = \left( \frac{x}{\cancel{x}} \right) - \left( \frac{1}{x} \right)$$

$$x^2-1 =$$