

PRINCÍPIOS E TÉCNICAS BÁSICAS EM COMBINATÓRIA

NOTAÇÕES

INTEIRO $n \in \mathbb{N}^{\rightarrow 0}$, $m \in \mathbb{N}$

$$[n] = \{1, \dots, n\} \quad [m, n] = \{m, \dots, n\} = [n] \setminus [m-1]$$

OBS: $|[n]| = n$ $|[m, n]| = n - (m-1) = n - m + 1$

DADO CONJUNTO V , $k \in \mathbb{N}$

$$\binom{V}{k} = \left\{ V' \subseteq V : |V'| = k \right\}$$

$$\left| \binom{V}{k} \right| = \binom{|V|}{k}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Partição

$$\mathcal{F} = \left\{ \underbrace{\{1, \dots, 9\}}_A, \underbrace{\{6, 9\}}_B, \underbrace{\{27\}}_C, \underbrace{V \setminus (A \cup B \cup C)}_D \right\}$$

$$\text{ex: } \{1, 2, 3, \dots, 27\}$$

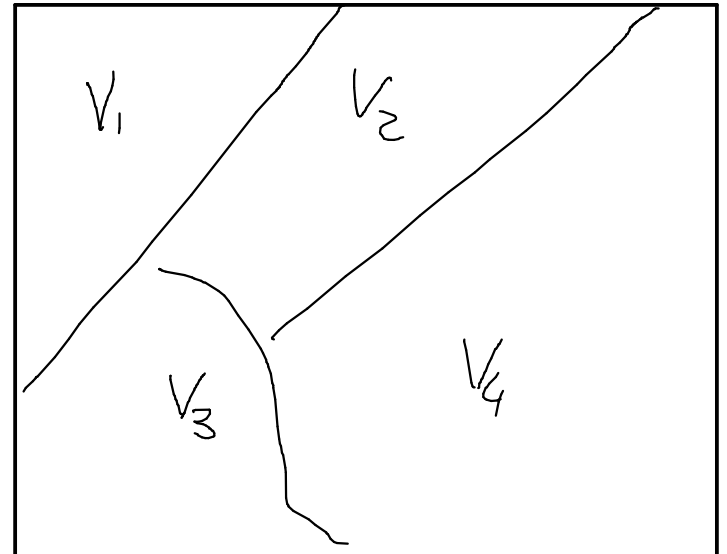
Uma **Partição** de um conjunto V é uma família $\mathcal{F} = \{V_1, \dots, V_k\}$

de subconjuntos de V t.q. cada elemento de V está contido

em exatamente um elemento de $\mathcal{F}$.

→ **Coloração** dos elts de V

↳ uma função $C: V \rightarrow \underbrace{[k]}_{\text{cores}}$



V

PRINCÍPIO DA CASA DOS POMBOS (PCP)

→ Se há $n+1$ POMBOS e n CASAS,

ENTÃO HÁ UMA CASA COM PLO MENOS DOIS POMBOS.

→ DADOS INTEIROS n, k , EM TODA PARTIÇÃO $V_1, \dots, V_k$ DE $[n]$

HÁ UMA PARTE COM PLO MENOS $\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$ ELTS

MENOR INTEIRO
QUE É MAIOR OU
IGUAL A n/k

$$\left\lceil n/k \right\rceil$$



Um conjunto $A \subseteq [n]$ é livre de soma se $\forall x, y \in A$, temos $x+y \notin A$.
PARA TODOS

Alternativamente: $\forall x, y, z \in A$, temos $x+y \neq z$

EX: NÚMEROS ÍMPARES
 $\{1, 2\}$

QUANTOS ÍMPARES EU TENHO
EM $[n]$? $\lceil \frac{n}{2} \rceil$

EX: $A = \{1, 3, 7\}$
 $B = \{6, 4\}$

- Qual é o maior tamanho possível p/ A?

EX: SE $A \subseteq [n]$ é livre de soma, ENTÃO $|A| \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$

PROVA: VAMOS PROVAR QUE SE $|A| > \lceil \frac{n}{2} \rceil$, ENTÃO A NÃO É LIVRE DE SOMA

SEJA $m' = \max A \leq n$

DEFINA $B = \{m' - a : a \in A\}$. NOTE QUE $|B| = |A| > \frac{n}{2} \geq \frac{m'}{2}$

LOGO, $|B| + |A| > m'$. COMO HÁ MAIS BOLAS DO QUE INTEIROS EM $[m']$,
VERMELHAS AZUIS
HÁ DUAS BOLAS COM O MESMO NÚMERO

EX: SE $A \subseteq [m]$ É LIVRE DE SOMA, ENTÃO $|A| \leq \lceil \frac{m}{2} \rceil$

PROVA: VAMOS MOSTRAR QUE SE $|A| > \lceil \frac{m}{2} \rceil$, ENTÃO A NÃO É LIVRE DE SOMA

SEJA $m' = \max A \leq m$ $\hookrightarrow |A| \geq \lceil \frac{m}{2} \rceil + 1$

DEFINA $B = \{m' - a : a \in A\} \setminus \{0\}$ NOTE QUE $|B| = |A| - 1 \geq \lceil \frac{m}{2} \rceil \geq \lceil \frac{m'}{2} \rceil$

LOGO, $|B| + |A| \geq \lceil \frac{m'}{2} \rceil + \lceil \frac{m'}{2} \rceil + 1 > m'$.
VERMELHAS AZUIS

PELO PRINCÍPIO DA CASA DOS POMBOS,

COMO HÁ MAIS BOLAS DO QUE INTEIROS EM $[m]$,

HÁ DUAS BOLAS COM O MESMO NÚMERO

$\Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$. SEJA $x \in A \cap B$

COMO $x \in B$, $\exists$ EXISTE $a \in A$ T.q. $x = m' - a \Rightarrow x + a = m'$
 $\overset{A}{\underbrace{x}} \overset{A}{\underbrace{+ a}} = m'$

LOGO, A NÃO É LIVRE DE SOMA, UMA CONTRADIÇÃO

□

DEF: Um conjunto $A \subseteq [n]$ é livre de divisores se $\forall x, y \in A$ temos $x \nmid y$
 $\frac{1}{2}$
NÃO DIVIDE

EX: CONJUNTO DE NÚMEROS PRIMOS EM $[n]$

EX: $n=20$, PRIMOS EM $[20]$: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19

EX: $A = \{0, 2, 4\}$. Como $2 \mid 4$, ENTÃO A NÃO LIVRE-DE-DIVISORES

EX: FIXE n . SEJA $A = [n+1, 2n]$. A É LIVRE DE DIVISORES

PROVA: SE $a \in A$, ENTÃO $a \geq n+1$. LOGO $2a \geq 2(n+1) = 2n+2 > 2n$.

PORTANTO $2a \notin A$. LOGO $k \cdot a \notin A$. ASSIM A É LIVRE DE DIVISORES

EX: SE $A \subseteq [2n]$ É LIVRE DE DIVISORES, ENTÃO $|A| \leq n$.

PROVA: PARA CADA ÍMPAR x EM $[2n]$ CRIE UMA CAIXA C_x . HÁ n CAIXAS

PARA CADA $y \in A$, ESCRVA $y = 2^k \cdot m$, EM QUE $k \geq 0$, E m É ÍMPAR
E COLOQUE y NA CAIXA m .

EX: Se $A \subseteq [2n]$ é livre de divisores, então $|A| \leq n$.

PROVA: Para cada ímpar x em $[2n]$ crie uma caixa C_x . Há n caixas.

Para cada $y \in A$, escreva $y = 2^k \cdot m$, em que $k \geq 0$, e m é ímpar e coloque y na caixa m .

↳ Todo número inteiro é produto de uma potência de 2 e um ímpar

AF: NÃO pode ter dois números na mesma caixa.

PROVA: Suponha, por contradição, que $y_1, y_2 \in C_x, y_1 \neq y_2$.

Então $\exists k_1, k_2$ t.q. $y_1 = 2^{k_1} \cdot x$ e $y_2 = 2^{k_2} \cdot x$

Podemos supor, sem perda de generalidade, que $k_1 > k_2$

Isso implica que $y_2 \mid y_1$ (ex: $k_1 = 3 > 2 = k_2$, $y_1 = 8 \cdot x$ e $y_2 = 4x$)
DIVIDE

ENTÃO $|A| \leq n$

EXERCÍCIO: REESCREVER A PROVA USANDO PCP

PRINCÍPIO DA INDUÇÃO MATEMÁTICA

SEJA $A \subseteq \mathbb{N}$ T.q.

1) $1 \in A$ (CASO BASE)

2) PARA TODO $n \in A$, TEMOS $n+1 \in A$ (PASSO INDUTIVO)

ENTÃO $A = \mathbb{N}$.

EX: SEJA $c \neq 0$. ENTÃO $\forall n \in \mathbb{N}$, TEMOS $\sum_{i=1}^n c^i = \frac{c^{n+1} - c}{c-1}$

PROG. GEOMÉTRICA

PROVA: SEJA

$$A = \left\{ n \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^n c^i = \frac{c^{n+1} - c}{c-1} \right\}$$

$$1) \sum_{i=1}^1 c^i = c = \frac{c^2 - c}{c-1} = \frac{c(c-1)}{c-1} \quad \text{Logo } 1 \in A.$$

$$2) \text{ SEJA } n \in A. \text{ Logo } \sum_{i=1}^n c^i = \frac{c^{n+1} - c}{c-1}.$$

PRINCÍPIO DA INDUÇÃO MATEMÁTICA

SEJA $A \subseteq \mathbb{N}$ T.q.

1) $1 \in A$ (CASO BASE)

2) Para todo $m \in A$, TEMOS $m+1 \in A$ (PASSO INDUTIVO)

ENTÃO $A = \mathbb{N}$.

EX: SEJA $C \neq 0$. ENTÃO $\forall m \in \mathbb{N}$, TEMOS $\sum_{i=1}^m C^i = \frac{C^{m+1} - C}{C-1}$ PROG. GEOMÉTRICA

PROVA: SEJA

$$A = \left\{ m \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^m C^i = \frac{C^{m+1} - C}{C-1} \right\}$$

$$1) \sum_{i=1}^1 C^i = C = \frac{C^2 - C}{C-1} = \frac{C(C-1)}{C-1}, \text{ Logo } 1 \in A.$$

$$2) \text{ SEJA } m \in A. \text{ Logo } \sum_{i=1}^m C^i = \frac{C^{m+1} - C}{C-1}. \quad (\text{HIPÓTESE DE INDUÇÃO})$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m+1} C^i &= C^{m+1} + \sum_{i=1}^m C^i = C^{m+1} + \frac{C^{m+1} - C}{C-1} = \frac{C^{m+1}(C-1) + C^{m+1} - C}{C-1} = \frac{C^{m+2} - C}{C-1} \\ &= \frac{C^{(m+1)+1} - C}{C-1}. \end{aligned}$$

Logo, $m+1 \in A$. Pelo PRINCÍPIO DA INDUÇÃO $A = \mathbb{N}$.

PRINCÍPIO DA INDUÇÃO MATEMÁTICA FORTE

SEJA $A \subseteq \mathbb{N}$ T.q.

1') $1 \in A$ (CASO BASE)

2') SE $\forall m' \in \mathbb{N}$ T.q. $m' < m$, TEMOS $m' \in A$, ENTÃO $m \in A$. (PASSO INDUTIVO)

ENTÃO $A = \mathbb{N}$.
= SE $\{1, \dots, m-1\} \in A$, ENTÃO $m \in A$

SEJA $A \subseteq \mathbb{N}$ T.q.

1) $1 \in A$ (CASO BASE)

2) PARA TODO $m \in A$, TEMOS $m+1 \in A$ (PASSO INDUTIVO)

ENTÃO $A = \mathbb{N}$.

EX: TODO NÚMERO NATURAL MAIOR QUE 1 É PRODUTO DE UM OU MAIS NÚMEROS PRIMOS.

PROVA: SEJA $\mathbb{P}$ O CONJ. DE NÚMEROS PRIMOS.

SEJA $A = \left\{ m \in \mathbb{N} : m = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{a_p}, \text{ com } a_p \geq 0 \right\}$

↳ CONJ. DOS NÚMEROS QUE SÃO PRODUTOS DE PRIMOS.

1') SE $m=2$, ENTÃO $m=2^1$. COMO $2 \in \mathbb{P}$, ENTÃO $2 \in A$. (CASO BASE)

2') SUPONHA QUE $m > 2$ E QUE $\forall m'$ COM $m' < m$, TEMOS $m' \in A$.
SE $m \in \mathbb{P}$, ENTÃO $m = m^1$. LOGO $m \in A$.

EX: TODO NÚMERO NATURAL MAIOR QUE 1 É PRODUTO DE UM OU MAIS NÚMEROS PRIMOS.

PROVA: SEJA $\mathbb{P}$ O CONJ. DE NÚMEROS PRIMOS.

$$\text{SEJA } A = \left\{ m \in \mathbb{N} : m = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{a_p}, \text{ com } a_p \geq 0 \right\}$$

↳ CONJ. DOS NÚMEROS QUE SÃO PRODUTOS DE PRIMOS.

$$\begin{aligned} \text{PROD} &= 1 \\ \text{FOR } p \in \mathbb{P} \\ \text{PROD} &\leftarrow \text{PROD} \cdot p^{(a_p)} \end{aligned}$$

$$\prod_{i \in \mathbb{P}} c_i = c_1 \cdot c_2 \cdots c_n$$

$$\begin{aligned} \sum_{a \in A} c_a & \\ \text{SOMA} &= 0 \\ \text{FOR } a \in A \\ \text{SOMA} &\leftarrow \text{SOMA} + c_a \end{aligned}$$

1') SE $m=2$, ENTÃO $m=2^1$. COMO $2 \in \mathbb{P}$, ENTÃO $2 \in A$.

2') SUPONHA QUE $m > 2$ E QUE $\forall m$ COM $m < n$, TEMOS $m \in A$. = $\{1, \dots, n-1\} \subseteq A$

CASO 1. SE $m \in \mathbb{P}$, ENTÃO $m = m^1$. LOGO $m \in A$. | CB

CASO 2. CASO CONTRÁRIO, $m = l_1 \cdot l_2$ COM $l_1, l_2 < m$.

$$\text{COMO } l_1, l_2 < m, \text{ TEMOS } l_1 = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{a_p} \in \text{ e } l_2 = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{b_p} \left. \vphantom{\prod_{p \in \mathbb{P}} p^{a_p}} \right\} \text{ HI}$$

PORTANTO

$$m = l_1 \cdot l_2 = \left(\prod_{p \in \mathbb{P}} p^{a_p} \right) \cdot \left(\prod_{p \in \mathbb{P}} p^{b_p} \right) = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{a_p} \cdot p^{b_p} = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{a_p + b_p}$$

LOGO $m = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{c_p}$ COM $c_p = a_p + b_p \in \mathbb{N}$, PORTANTO, $m \in A$.

PELO PRINCÍPIO DA INDUÇÃO, TEMOS QUE $A = \{2, 3, \dots\}$.

□

CONTRA
EXEMPLO
MÍNIMO
PRINCÍPIO DA
BOA ORDEM

CONTAGEM DUPLA

DOUBLE COUNTING

- CONTAR UM CONJUNTO DE DUAS FORMAS

Ex: $\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} = 2^m$

$$\mathcal{P}_k(m) \cap \mathcal{P}_l(m) = \emptyset \quad k \neq l$$

PROVA: SEJA $\mathcal{P}(m) = \{A \subseteq [m]\}$ POWER SET $\in$ CONJ. PARTES

$$\mathcal{P}_k(m) = \{A \subseteq [m] : |A| = k\} = \binom{[m]}{k}$$

NOTE QUE $\mathcal{P}(m) = \bigcup_{i=0}^m \mathcal{P}_i(m) \in |\mathcal{P}_k(m)| = \binom{m}{k}$

$$|\mathcal{P}(m)| = \sum_{i=0}^m |\mathcal{P}_i(m)| = \sum_{i=0}^m \binom{m}{i}$$

Por outro lado, cada elto de $[m]$ pode estar ou não estar em $A \in \mathcal{P}(m)$

$(0 \text{ ou } 1, 0 \text{ ou } 1, \dots)$
m ENTRADAS

$$2^m$$

$$\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$$
$$\mathbb{Z}_2^m = \mathbb{Z}_2 \times \dots \times \mathbb{Z}_2$$

Ex: $m = 10$ $A = \{2, 3, 7\} \rightsquigarrow v_A = (0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$

$v_A = (1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1) \rightsquigarrow A = \{1, 3, 4, 8, 9, 10\}$

DEF: DADO CONJUNTO $E \subseteq \mathcal{P}(n)$, DENOTAMOS POR $d_E(u)$ O NÚMERO
DE ELEMENTOS DE E QUE CONTÊM u . $\hookrightarrow$ GRAU
DEGREE

EX: $E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{7, 8, 9\}\}$, $d_E(1) = 2$, $d_E(3) = 1$, $d_E(10) = 0$

EX: SEJAM $k \in n \in \mathbb{N}$ COM $1 \leq k \leq n$.

SE $E \subseteq \binom{[n]}{k}$, ENTÃO $\sum_{u \in [n]} d_E(u) = k \cdot |E|$

HANDSHAKE LEMMA

$$\begin{aligned} & \{1, 2\} \times \{1, 3, 5\} \\ &= \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), \\ & \quad (2, 1), (2, 3), (2, 5)\} \end{aligned}$$

PROVA: CONSIDERE O CONJUNTO

$$S = \{(u, e) \in [n] \times E : u \in e\}$$

FIXADO $u \in [n]$, u ESTÁ EM QUANTOS PARES DE S ? $d_E(u)$

$$\text{LOGO } |S| = \sum_{u \in [n]} d_E(u)$$

EX: SEJAM $k \in \mathbb{N}$ com $1 \leq k \leq n$.

SE $E \subseteq \binom{[n]}{k}$, ENTÃO

$$\sum_{u \in [n]} d_E(u) = k \cdot |E|$$

HANDSHAKE LEMMA

$$\begin{aligned} & \{1, 2\} \times \{1, 3, 5\} \\ &= \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), \\ & \quad (2, 1), (2, 3), (2, 5)\} \end{aligned}$$

PROVA: CONSIDERE O CONJUNTO

$$S = \{ (u, e) \in [n] \times E : u \in e \}$$

FIXADO $u \in [n]$, u ESTÁ EM QUANTOS PARES DE S ? $d_E(u)$

LOGO $|S| = \sum_{u \in [n]} d_E(u)$

POR OUTRO LADO, $e \in E$ ESTÁ EM QUANTOS PARES DE S ? k

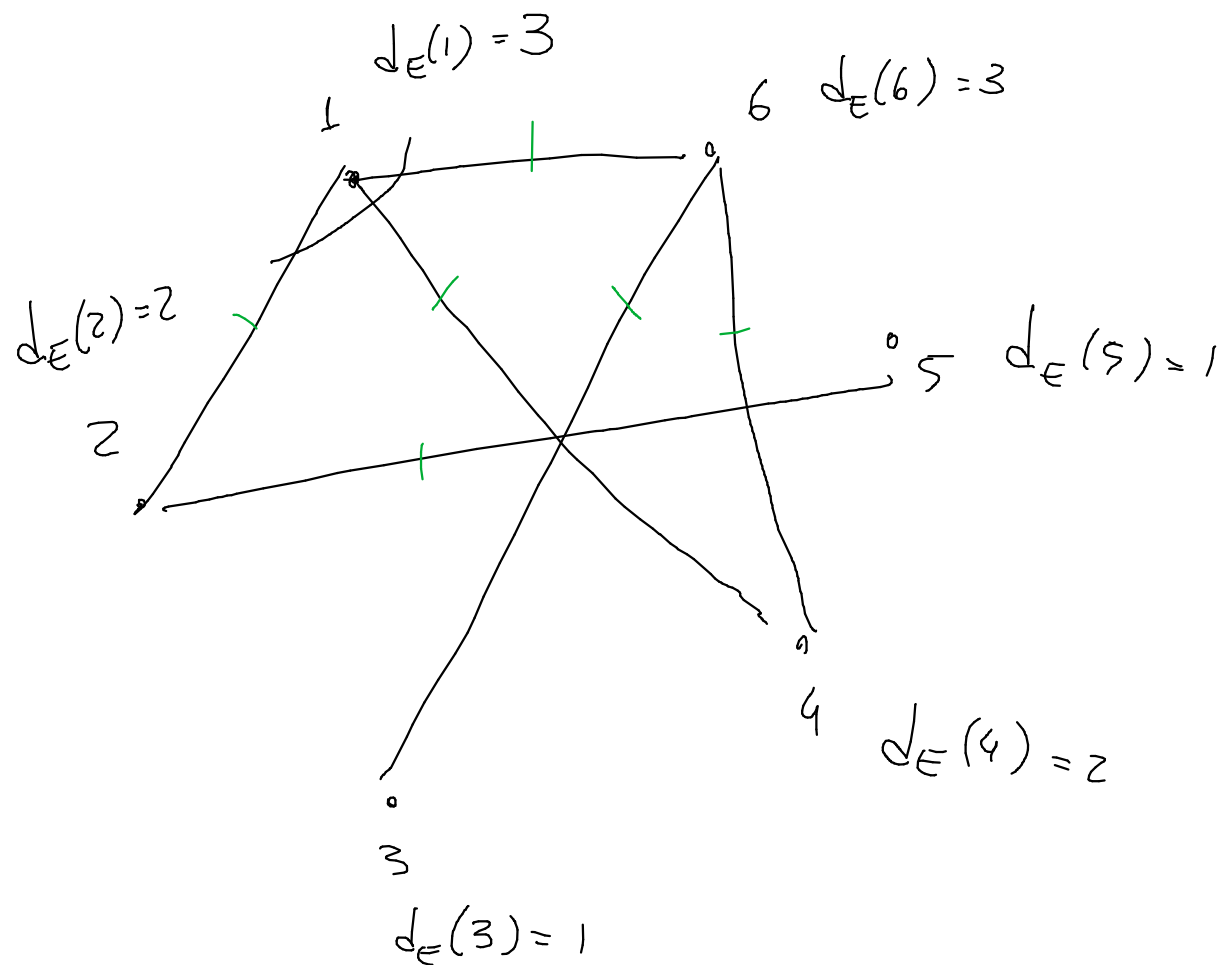
LOGO, $|S| = \sum_{e \in E} k = k|E|$

$$e = \{7, x, 25, 100\} : (7, e), (x, e), (25, e), (100, e)$$

Ex: Sejam $n \in \mathbb{N}$ com $1 \leq k \leq n$.

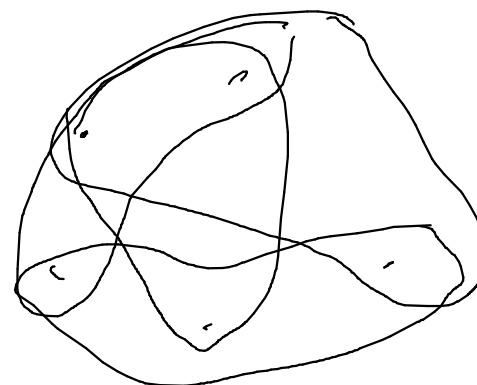
Se $E \subseteq \binom{[n]}{2}$, então

$$\sum_{u \in [n]} d_E(u) = 2 \cdot |E|$$



$$|E| = 6$$

$$\sum_{u \in [6]} d_E(u) = 3 + 2 + 1 + 2 + 1 + 3 = 12 = 2 \cdot 6$$



Ex: Se $E \subseteq \binom{[n]}{3}$ é uma família T.q. $|A \cap B| \leq 1, \forall A, B \in E$
 ENTÃO $|E| \leq \frac{n^2 - n}{6}$

PROVA: Considere o CONJ. $\mathcal{R} = \{(A, \{u, v\}) : A \in E \text{ e } u, v \in A\}$

Ex: Se $\{a, b, c\} = A \in E$ ENTÃO $(A, \{a, b\}), (A, \{a, c\}), (A, \{b, c\}) \in \mathcal{R}$.

CADA $A \in E$ ESTÁ EM PRECISAMENTE TRÊS PARES DE $\mathcal{R}$.

$$\text{Logo, } |\mathcal{R}| = \sum_{A \in E} 3 = 3|E|$$

Por outro lado, se $u, v \in [n]$ ENTÃO $\{u, v\}$ ESTÁ EM NO MÁXIMO UM PAR DE $\mathcal{R}$

Porque $|A \cap B| \leq 1, \forall A, B \in E$

$$\text{Logo } |\mathcal{R}| = \sum_{\{u, v\} \in \binom{[n]}{2}} d(\{u, v\}) \leq \sum_{\{u, v\} \in \binom{[n]}{2}} 1 = \binom{n}{2} = \frac{n^2 - n}{2}$$

$$\Rightarrow 3|E| = |\mathcal{R}| \leq \frac{n^2 - n}{2} \Rightarrow |E| \leq \frac{n^2 - n}{6}$$

RECORRÊNCIAS

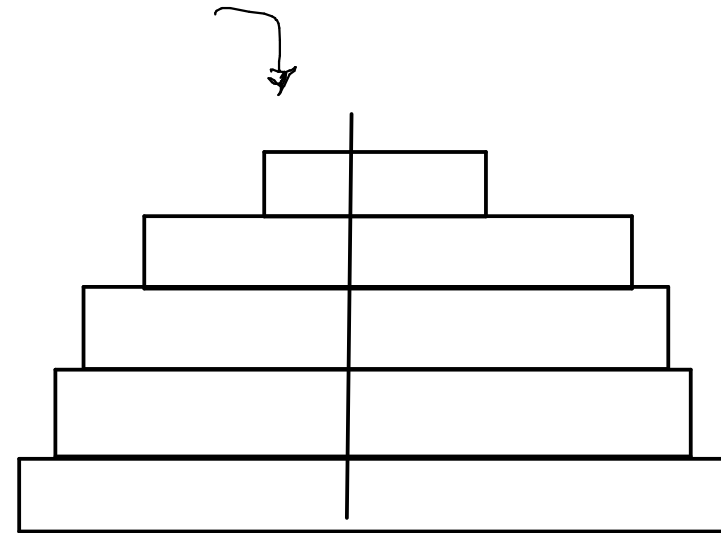
$$f(n) = n!$$

$$n! = n \cdot (n-1)!$$

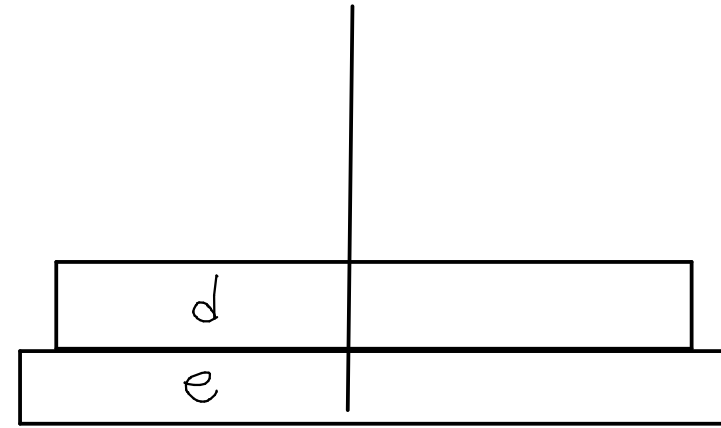
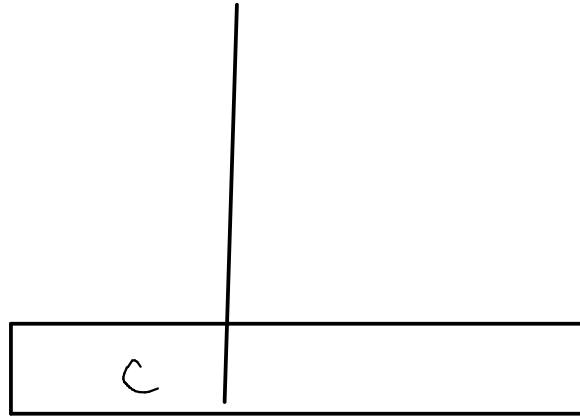
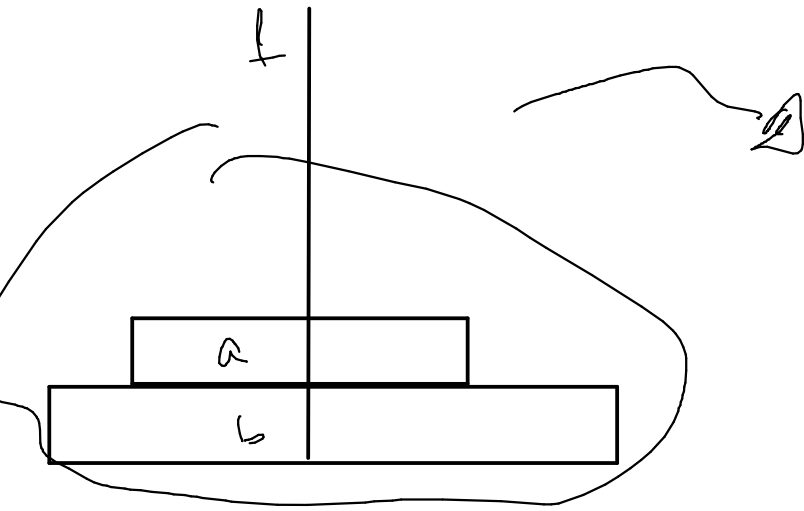
$$f(1) = 1$$

$$f(n) = n \cdot \underline{\underline{f(n-1)}}$$

A Torre de Hanoi



A Torre de Hanoí



T_n = O NÚMERO DE OPERAÇÕES P/ MUDAR TODOS OS DISCOS DE PILHA

T_{n-1}

$$T_n = \underbrace{T_{n-1}}_{\text{Mover P/Pilha 1}} + \underbrace{1}_{\text{Mover e P/Pilha 2}} + \underbrace{T_{n-1}}_{\text{Mover a-d}} = 2T_{n-1} + 1$$

$$T_1 = 1$$

n 1 2 3 4 ...

$$T_n = 2T_{n-1} + 1$$

T_n 1 3 7 15

$$T_n = 2^n - 1$$

DEFINIÇÃO DE T_m

$$T_1 = 1$$

$$\underline{T_m = 2T_{m-1} + 1}$$

m OPERAÇÕES
FORMA FEEHATA
 $1/2$ OPERAÇÕES

PROPOSIÇÃO : $T_m = 2^m - 1$ $\cup$ NOTAÇÃO ASSINTÓTICA

PROVA : POR INDUÇÃO.

$$A = \{m \in \mathbb{N} : T_m = 2^m - 1\}$$

CASO BASE : $1 \in A$ PORQUE $T_1 \stackrel{\text{DEF}}{=} 1 = 2^1 - 1$

SUPONHA QUE $m-1 \in A$.

OU SEJA $T_{m-1} = 2^{m-1} - 1$.

HIPOTESE DE INDUÇÃO : $m-1 \in A \Rightarrow T_{m-1} = 2^{m-1} - 1$

PASSO INDUTIVO : $T_m \stackrel{\text{DEF}}{=} 2T_{m-1} + 1 \stackrel{\text{HI}}{=} 2(2^{m-1} - 1) + 1 = 2 \cdot 2^{m-1} - 2 + 1 = 2^m - 1$ $\square$

RETAS NO PLANO

The diagram shows three lines in a plane. One line is horizontal, and two others intersect it at different points. The regions are labeled with numbers: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. There are two red 'X' marks and a yellow shaded region.

Qual o maior número de regiões L_m que podemos dividir o plano com m retas?

m	1	2	3	4
L_m	2	4	7	

$$L_m \leq L_{m-1} + \underbrace{(m-1)}_{+1} + 1$$

Qual o maior número de regiões L_m que podemos dividir o plano com m retas?

n	1	2	3	4
L_n	2	4	7	

$$L_m \leq L_{m-1} + \underbrace{(m-1)+1}_{=m} + 1$$

42

Qual o maior número de regiões L_n que podemos dividir o plano com n retas?

n	1	2	3	4
L_n	2	4	7	

$$T_1 = 2$$

$$L_n = L_{n-1} + \underbrace{(n-1)+1}_{\substack{\text{\# de retas que intersectam a } n\text{-ésima retas.}}} = L_{n-1} + n = (L_{n-2} + (n-1)) + n = \sum_{i=1}^n i + 1$$

$$= \underbrace{T_1 + 2}_{T_2} + 3 + \dots + n$$

$$= \underbrace{T_2 + 3 + \dots + n}_{T_3}$$

$$= 1 + 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

Qual a forma fechada? / L_n ?

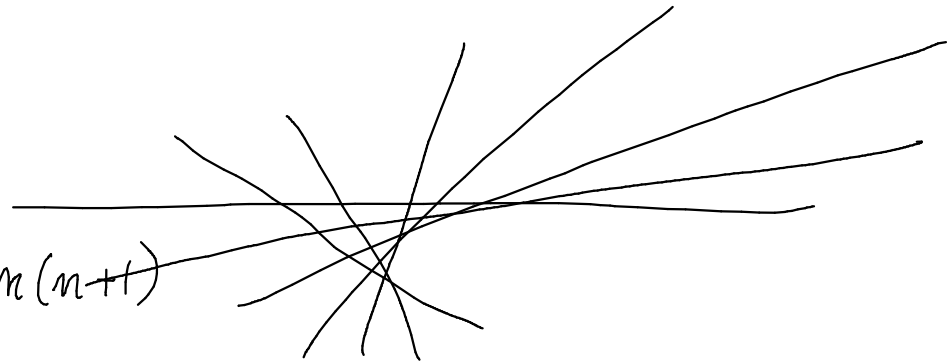
$$S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-2) + (n-1) + n$$

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-2) + (n-1) + n$$

$$S_n = n + (n-1) + (n-2) + \dots + 3 + 2 + 1$$

$$2S_n = n+1 + n+1 + n+1$$

$$n+1 + n+1 + n+1 = n(n+1)$$



PROBLEMA DE JOSEFUS

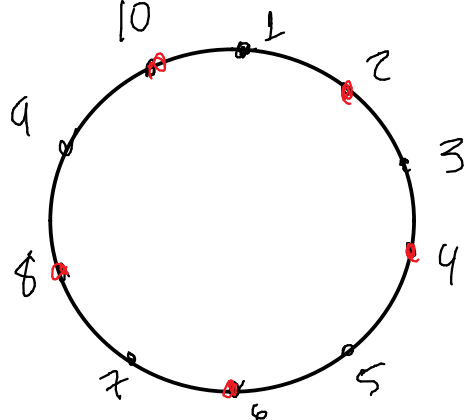
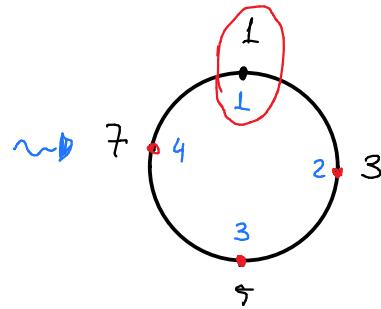
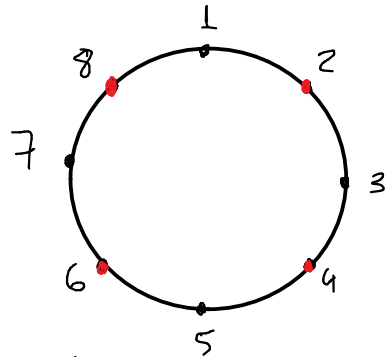
~> Há n pessoas organizadas de forma circular

~> Há uma regra de eliminação: pula um, mata um

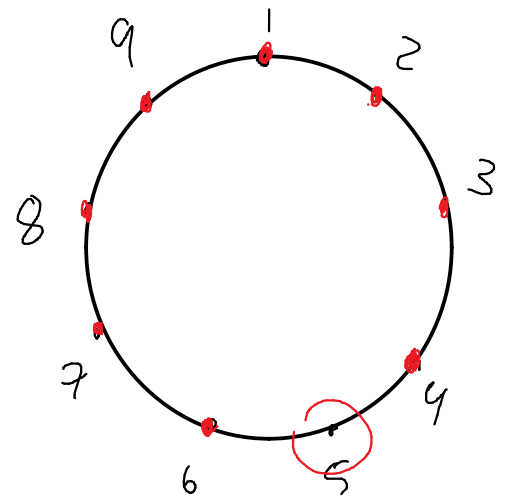
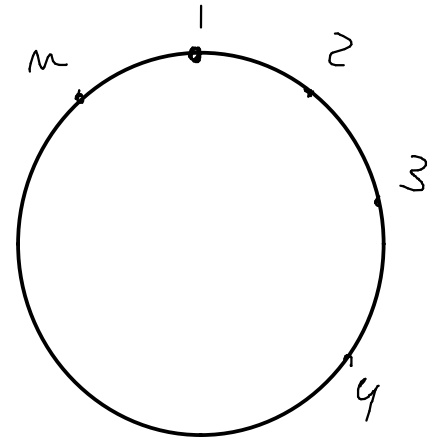
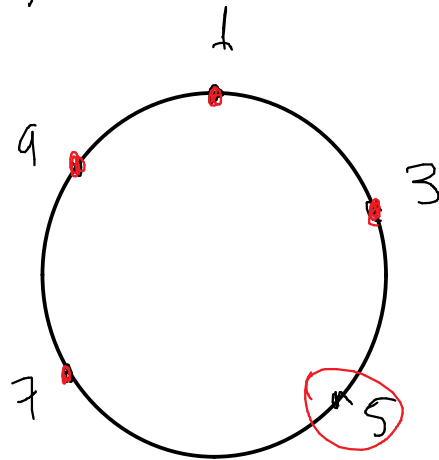
Quem sobrevive?

→ Na primeira volta eliminamos os pares

SUPONHA n É PAR

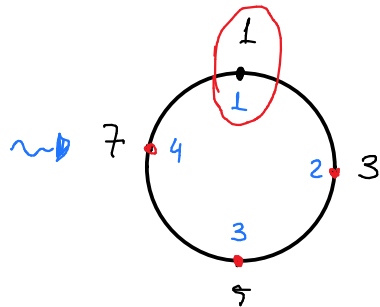
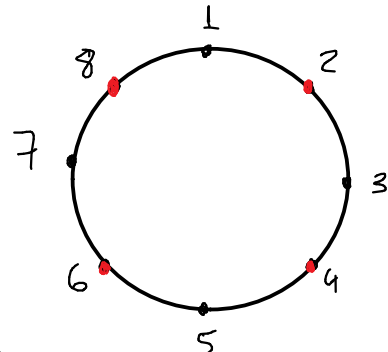


~>



SOBREVIVE O 5

SUPONHA $n \in \mathbb{P}$



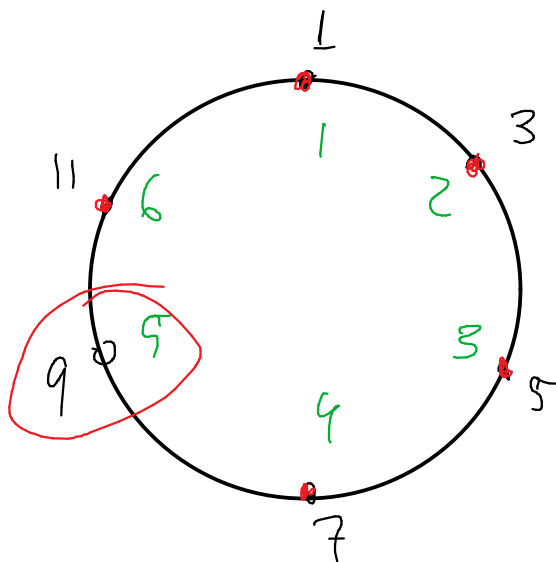
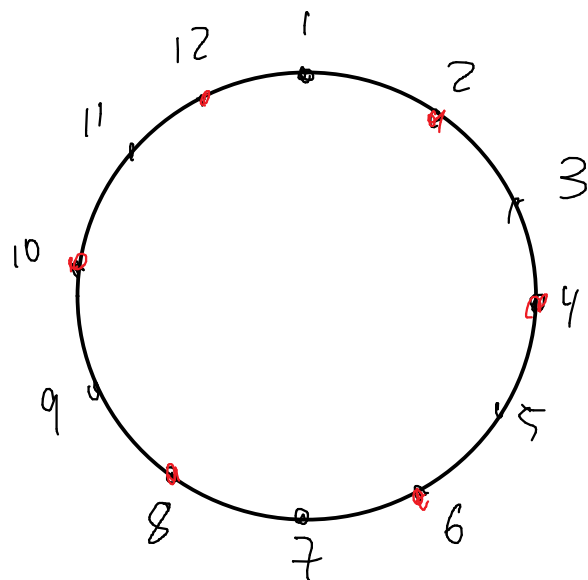
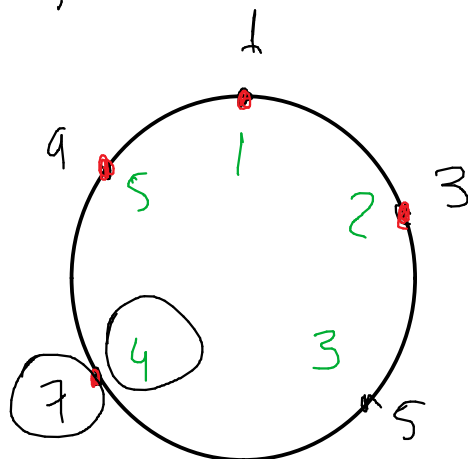
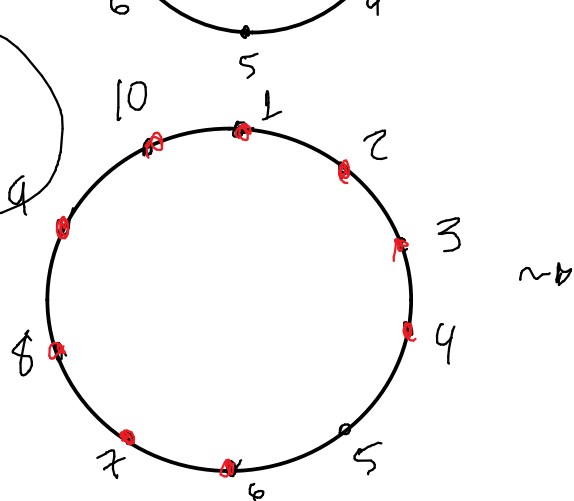
$$J(n) = 2J\left(\frac{n}{2}\right) - 1$$

$$i = J\left(\frac{n}{2}\right)$$

$$2i - 1$$

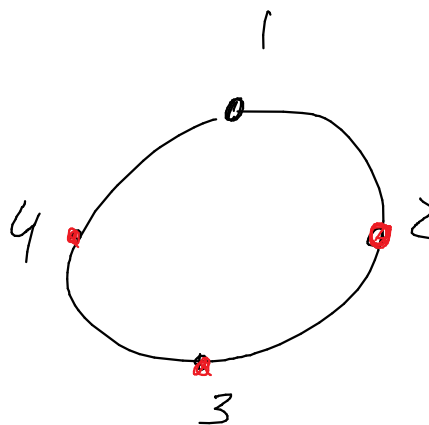
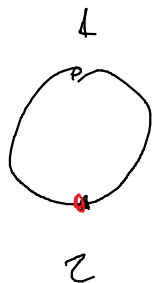
$$J(5) = 3$$

$$J(10) = 2J(5) - 1 = 5$$



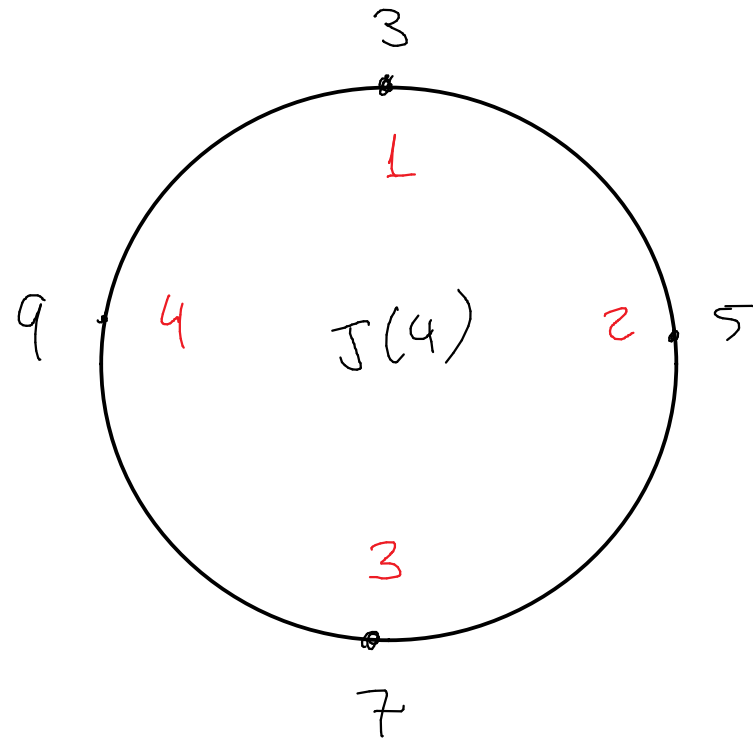
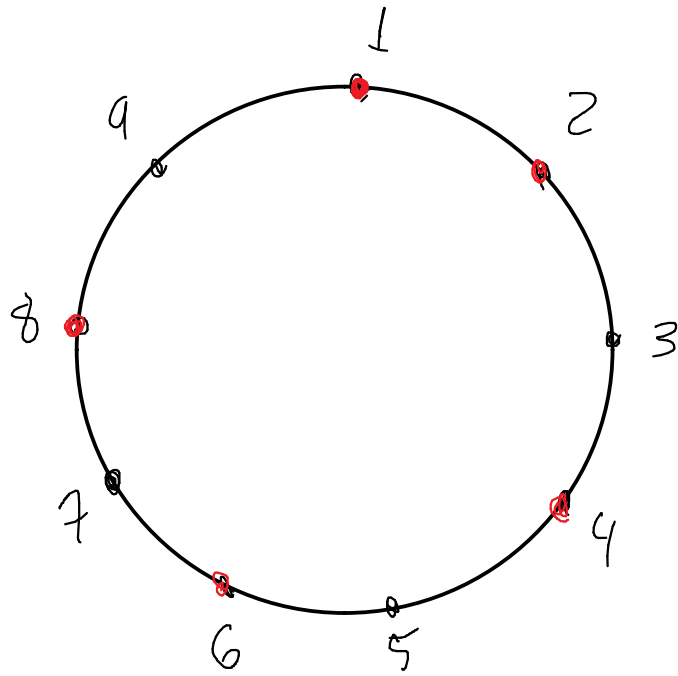
$$J(6) = 5$$

n	1	2	3	4
J	1	1	3	1



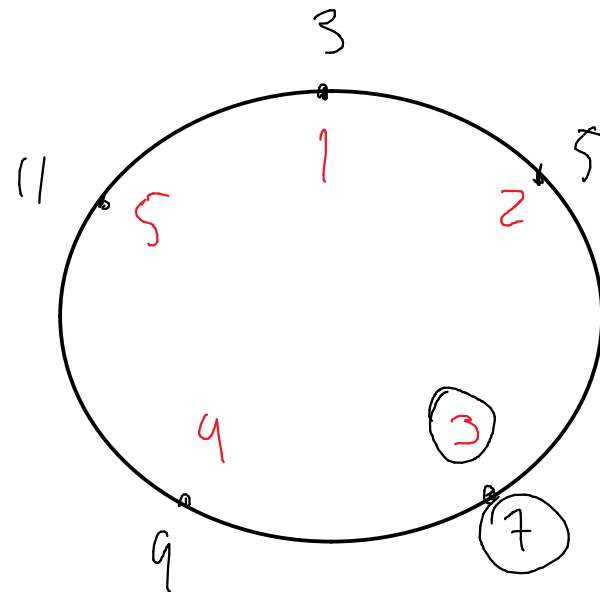
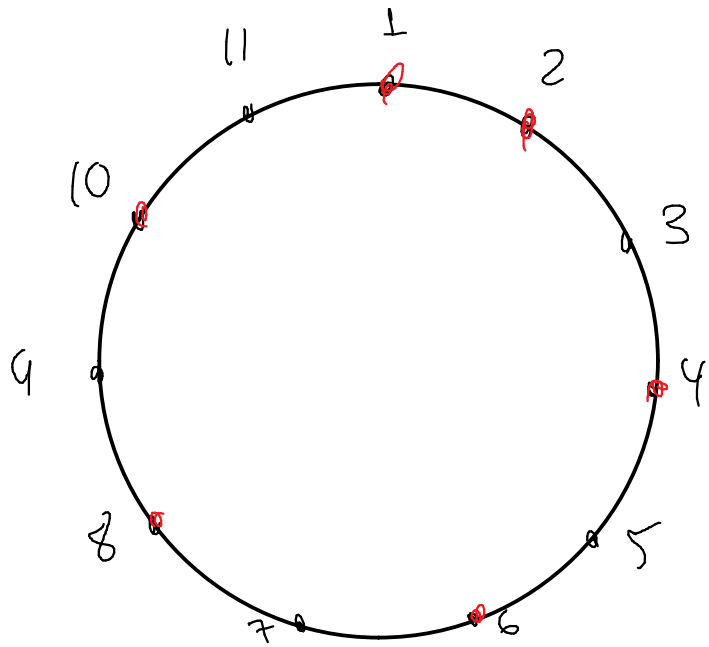
$n \in \text{IMPAR}$

$$J(n) = 2J\left(\frac{n-1}{2}\right) + 1$$



$$J(9) = 2 \cdot J(4) + 1$$

$$2 \cdot 1 + 1$$



$$J(11) = 2 \cdot J(5) + 1$$

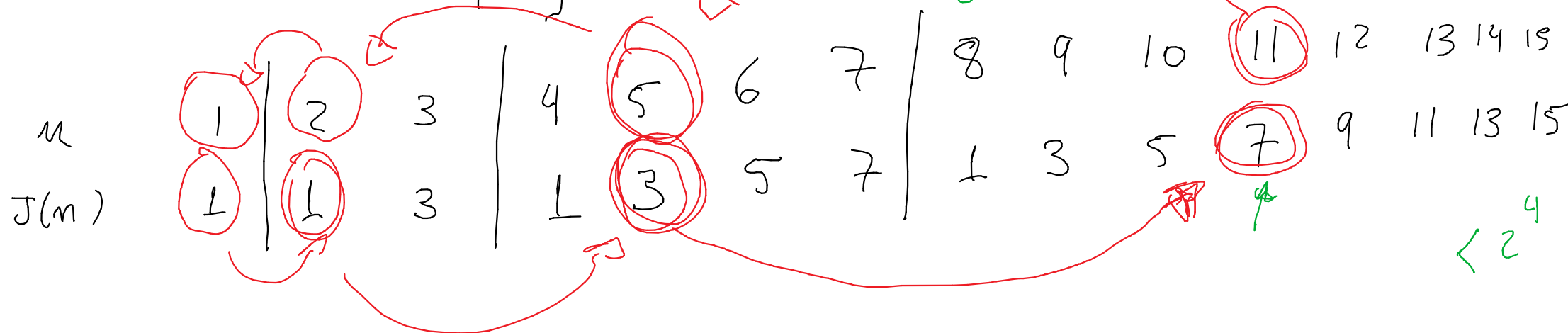
$$= 2 \cdot 3 + 1$$

$$= 7$$

$$\overline{J}(1) = 1$$

$$\left. \begin{aligned} J(n) &= 2J\left(\frac{n}{2}\right) - 1 \\ J(n) &= 2J\left(\frac{n-1}{2}\right) + 1 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} n &\text{ PAR} \\ n &\text{ IMPAR} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} J(2n) &= 2J(n) - 1 \\ J(2n+1) &= 2J(n) + 1 \end{aligned} \right\}$$



$$n = 11$$

$$m = 3$$

$$l = 3$$

$$n = 2^m + l$$

$$J(11) = 2\ell + 1$$

PROPOSIÇÃO: SEJA $m \in \mathbb{N}$ E $m, l \in \mathbb{N}$ T.q. $n = 2^m + l$ COM $m \geq 0$
 E $0 \leq l < 2^m$, ENTÃO $J(n) = 2l + 1$.

PROVA: INDUÇÃO m . SEJA $A = \left\{ m \in \mathbb{N} : \text{SE } n = 2^m + l \text{ PARA ALGUM } l, \text{ ENTA } J(n) = 2l + 1 \right\}$

BASE: $m = 1$, TEMOS $n = 2$ OU $n = 3$

HI: SE $m' < m$ E $n' = 2^{m'} + l'$,
 ENTÃO $J(n') = 2 \cdot l' + 1$

PI: SEJA $n = 2^m + l$

DEF.
DE J

$$l = n - 2^m$$

PAR PAR

1) SE n É PAR, ENTÃO $J(n) = 2 \cdot J\left(\frac{n}{2}\right) - 1$

$$\text{SEJA } n' = \frac{n}{2} = \frac{2^m + l}{2} = 2^{m-1} + \frac{l}{2}$$

$$\begin{matrix} m' = m-1 < m \\ l' = l/2 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 2^{m'} + l' \end{matrix}$$

$$\text{LOGO, } J(n') = 2 \cdot l' + 1 \text{ E, PORTANTO, } J(n) = 2 \cdot J\left(\frac{n}{2}\right) - 1 = 2(2l' + 1) - 1 = 2(l + 1) - 1 = 2l + 1$$

2) SE n É ÍMPAR, ENTÃO l É ÍMPAR.

$$J(n) = 2 \cdot J\left(\frac{n-1}{2}\right) + 1$$

$$\text{SEJA } n' = \frac{n-1}{2} = \frac{2^m + (l-1)}{2} = 2^{\overbrace{m-1}} + \frac{l-1}{2}$$

$$\text{LOGO } J(n') = 2 \cdot \frac{l-1}{2} + 1 = l \text{ E, PORTANTO, } J(n) = 2 \cdot l + 1$$

n	1		2	3		4	5	6	7		8	9	10	11	12	...
m	0		1	1		2	2	2	2		3	3	3	3	3	...
l	1		0	1		0	1	2	3		0	1	2	3	4	...

$$n = 2^m + l$$

GENERALIZANDO

CONSTANTES DIFERENTES α, β, γ

$$f(1) = \alpha$$

$$f(2n) = 2f(n) + \beta$$

$$f(2n+1) = 2f(n) + \gamma$$

$$f(n) = A(n) \cdot \alpha + B(n) \cdot \beta + C(n) \cdot \gamma$$

$$f(2^m + l) = 2^m \cdot \alpha + \underbrace{(2^m - l - 1)} \cdot \beta + \underbrace{l} \cdot \gamma$$

n	$f(n)$		
1	α		
2	$(2)\alpha$	$+ (0)\beta$	
3	2α		$+ \gamma$
4	$(4)\alpha$	$+ (3)\beta$	
5	4α	$+ 2\beta$	$+ \gamma$
6	4α	$+ \beta$	$+ 2\gamma$
7	4α		$+ 3\gamma$
8	$(8)\alpha$	$+ (7)\beta$	
9	8α	$+ (6)\beta$	$+ \gamma$
10	8α	$+ (5)\beta$	$+ 2\gamma$

$$f(1) = \alpha$$

$$f(2n) = 2f(n) + \beta$$

$$f(2n+1) = 2f(n) + \gamma$$

$$f(n) = A(n) \cdot \alpha + B(n) \cdot \beta + C(n) \cdot \gamma$$

Suponha que $f(n) = 1 \quad \forall n$

$$1 = f(1) = \alpha$$

$$1 = f(2n) = 2f(n) + \beta = 2 + \beta \Rightarrow \beta = -1$$

$$1 = f(2n+1) = 2f(n) + \gamma = 2 + \gamma \Rightarrow \gamma = -1$$

$$1 = A(n) \cdot - B(n) - C(n)$$

$$f(1) = 1$$

$$f(2n) = 2f(n) - 1$$

$$f(2n+1) = 2f(n) - 1$$

$$f(n) = A(n) \cdot \alpha + B(n) \cdot \beta + C(n) \cdot \gamma$$

$$f(1) = \alpha$$

$$f(2n) = 2f(n) + \phi$$

$$f(2n+1) = 2f(n) + \gamma$$

Suponha que $f(n) = n \quad \forall n$

$$1 = f(1) = \alpha$$

$$\alpha = 1$$

$$2n = f(2n) = 2f(n) + \beta = 2n + \beta \Rightarrow \beta = 0$$

$$2n+1 = f(2n+1) = 2f(n) + \gamma = 2n + \gamma \Rightarrow \gamma = 1$$

$$n = 2^m + l$$

$$\left. \begin{array}{l} A(n) - B(n) - C(n) = 1 \\ A(n) + C(n) = n \end{array} \right\}$$

$$A(2^m + l)$$

$$= 2^m$$

$$2A(n) - B(n) = 1 + n$$

$$C(n) = n - A(n) = 2^m + l - 2^m = l$$

$$B(n) = 2A(n) - n - 1 = 2 \cdot 2^m - 2^m - l - 1 = 2^m - l - 1$$

$$f(m) = A(m)$$

$$\Rightarrow \underline{\alpha=1, \beta=0, \gamma=0}$$

$$f(1) = \alpha = 1$$

$$f(2m) = 2f(m) = 2A(m)$$

$$f(2m+1) = 2f(m) = 2A(m)$$

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = 1 \\ f(2m) = 2f(m) \\ f(2m+1) = 2f(m) \end{array} \right\} A(2^m + l) = 2^m$$

CONSTANTES DIFERENTES $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \Delta$

$$f(1) = \alpha$$

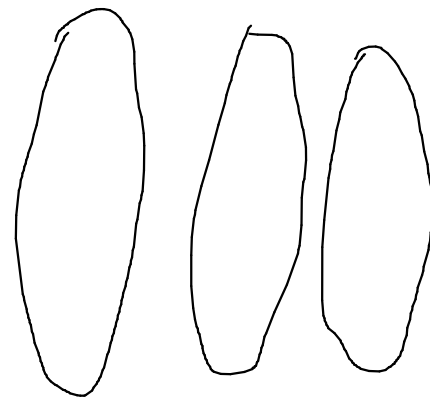
$$f(3n) = \Delta f(n) + \beta$$

$$f(3n+1) = \Delta f(n) + \gamma$$

$$f(3n+2) = \Delta f(n) + \delta$$

$$m' = 3m + l \quad l \in \{0, 1, 2\}$$

$$\Delta^m +$$



EX:

$$Q(0) = \alpha$$

$$Q(1) = \beta$$

$$Q(n) = \frac{1 + Q(n-1)}{Q(n-2)}$$

$$\begin{aligned} Q(n) &= \frac{1 + Q(n-1)}{Q(n-2)} \\ &= \frac{1 + \frac{\alpha + 1}{\beta}}{\frac{1 + \alpha + \beta}{\alpha + \beta}} = \end{aligned}$$

n	Q
0	α
1	β
2	$\frac{1 + \beta}{\alpha}$
3	$\frac{1 + \alpha + \beta}{\alpha \beta}$
4	$\frac{\alpha + 1}{\beta}$
5	α
6	β

PROPOSIÇÃO: SEJA $n = 5n' + l$ EM QUE $l \in \{0, \dots, 4\}$
ENTÃO

$$Q(n) = Q(l)$$

$$Q(n) = \begin{cases} \alpha & \text{SE } l = 0 \\ \beta & \text{SE } l = 1 \\ \frac{1 + \beta}{\alpha} & \text{SE } l = 2 \\ \frac{1 + \alpha + \beta}{\alpha \beta} & \text{SE } l = 3 \\ \frac{\alpha + 1}{\beta} & \text{SE } l = 4 \end{cases}$$

$$Q(n) = Q(n \bmod 5)$$