Dado um grafo bipartido completo $G=(V,E)$ com $2n$ vértices e n^2 arestas, com o conjunto V bipartido em $V = X \cup Y$, o algoritmo seguinte encontra em tempo $\Theta(n^2 m)$ um emparelhamento perfeito de peso máximo.

Rotulação de vértices viável $\ell : X \cup Y \to [0, \infty)$ é uma função que satisfaz $\ell(x) + \ell(y) \geq w(xy)$.
se M é emparelhamento e ℓ e rotulação de vértices viável $\sum_{e \in M} w(e) \leq \sum_{v \in V} \ell(v)$.

Rotulação trivial $\ell(v) = \begin{cases} \max_{y \in Y} w(vy), & \text{se } v \in X \\ 0, & \text{se } v \in Y \end{cases}$

Dada uma rotulação de vértices viável ℓ:
$$E_\ell = \{ xy \in E : \ell(x) + \ell(y) = w(xy) \}.$$

O subgrafo gerador de G com conjunto de arestas E_ℓ é o subgrafo-igualdade $G_\ell = (X \cup Y, E_\ell)$.

Todo emparelhamento perfeito M^* em G_ℓ satisfaz
$$\sum_{e \in M^*} w(e) = \sum_{v \in V} \ell(v),$$

Teorema de Kuhn: Seja l uma rotulação de vértices viável de G. Se G_l contém um emparelhamento perfeito M^*, então M^* é um emparelhamento perfeito máximo de G.

prova: Seja G_l com emparelhamento perfeito M^*. Como G_l é um subgrafo gerador de G, temos que M^* também é emparelhamento perfeito de G. Suponha M um emparelhamento perfeito arbitrário de G. Temos:

$$w(M) = \sum_{e \in M} w(e) \leq \sum_{v \in V} l(v) = \sum_{e \in M^*} w(e) = w(M^*).$$

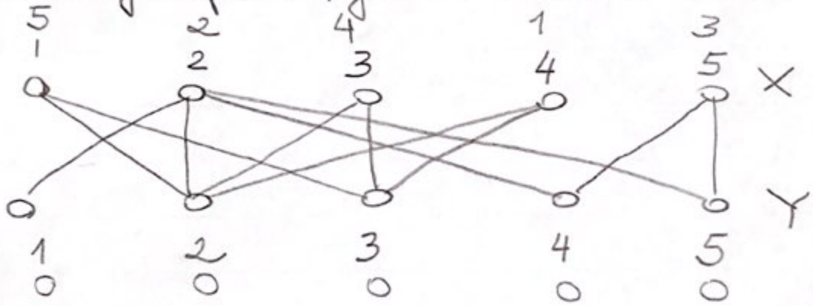
∎

O algoritmo de Kuhn aplica sucessivas vezes o algoritmo anterior para emparelhamento perfeito, usando sucessivas rotulações viáveis.

Exemplo
$$W = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccccc} 3 & 5 & 5 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{c} 5 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{array} \\ \begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \end{array}$$

Representamos a rotulação inicial trivial ℓ

O subgrafo-igualdade G_ℓ é o anterior



sabemos que G_ℓ não admite emparelhamento perfeito. Exibimos $S=\{x_1, x_3, x_4\}$ com $T=N_{G_\ell}(S)=\{y_2, y_3\}$.

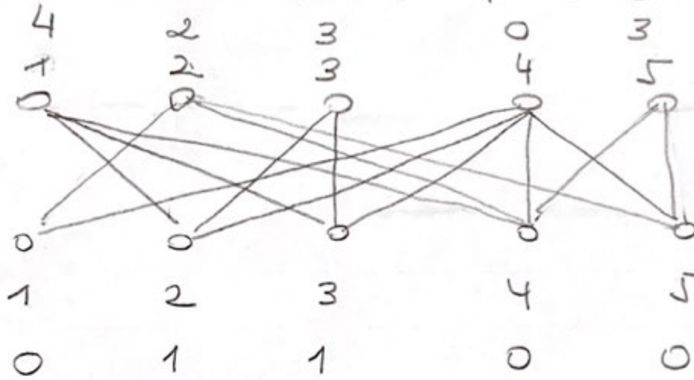
Modifiquemos a rotulação ℓ usando a variável auxiliar $\alpha_\ell = \min\limits_{x\in S,\, y\notin T} \{\ell(x)+\ell(y)-w(xy)\}$.

$$\ell'(v) = \begin{cases} \ell(v) - \alpha_\ell, & v\in S \\ \ell(v) + \alpha_\ell, & v \in T \\ \ell(v), & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Temos G_ℓ é subgrafo de $G_{\ell'}$ porque $T=N_{G_\ell}(S)$, logo toda $xy\in E(G_\ell)$ ou tem $x\in S$ e $y\in T$, ou tem $x\notin S$ e $y\notin T$. Toda $xy \in E(G_\ell)$ satisfaz $\ell'(x)+\ell'(y)=\ell(x)+\ell(y)$.

A18-4

$$W = \begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} 3 & 5 & 5 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{matrix} & - \end{array}$$



$G_{\ell'}$

Aplicando o algoritmo para emparelhamento perfeito no subgrafo igualdade $G_{\ell'}$ encontramos $M = \{x_1y_4, x_2y_1, x_3y_3, x_4y_2, x_5y_5\}$ e um emparelhamento ótimo para G.

Complexidade $O(n^2m)$:
Um emparelhamento perfeito tem n arestas, e temos $O(n)$ estágios de aumentação.
Cada estágio de construção da árvore húngara em tempo $O(nm)$.