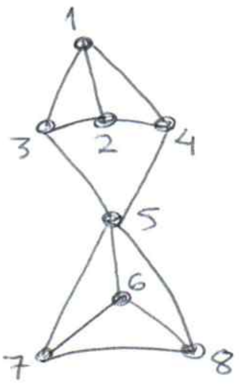
AULA 4

CONECTIVIDADE

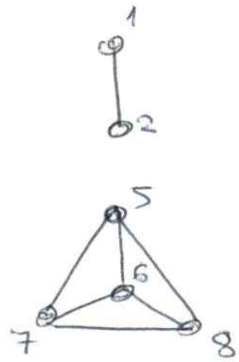
- Seja $G(V,E)$ um grafo conexo. Um corte de vértices de G é um subconjunto minimal de vértices $V' \subseteq V$ cuja remoção de G o desconecta ou o transforma no grafo trivial.

Exemplo:



$\{3,4\}$ é um corte de vértices

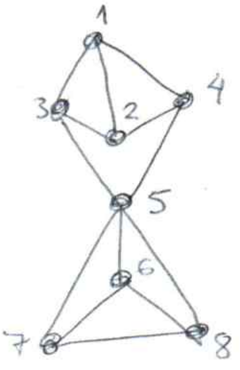
removendo



- $\{3,4,7\}$ também desconecta o grafo acima. Então, $\{3,4,7\}$ é também um corte?
- Qual o corte de cardinalidade mínima?

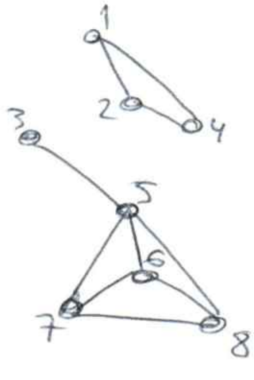
- Um corte de arestas é um subconjunto minimal de arestas $E' \subseteq E$ cuja remoção o desconecta.

Exemplo:



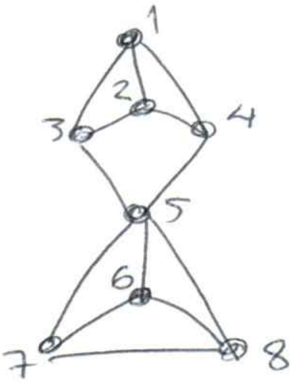
$\{(1,3),(2,3),(4,5)\}$ é um corte de arestas

- Qual o corte de cardinalidade mínima?



- Conectividade de vértices (C_V): cardinalidade do menor corte de vértices do grafo.
- Analogamente para conectividade de arestas (C_E).

Quais são as conectividades de vértices e de arestas do grafo do exemplo?

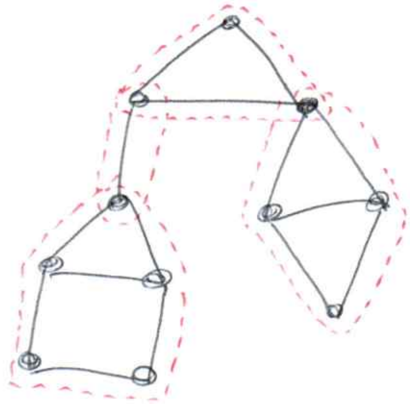


$C_V = ?$

$C_E = ?$

- Para k inteiro positivo, dizemos que G é k-conexo em vértices quando $C_V \geq k$, e dizemos que é k-conexo em arestas quando $C_E \geq k$.
- Grafos 1-conexos são os que já denominamos conexos.
- Um vértice v é uma articulação quando sua remoção de G o desconecta.
- Uma aresta e é uma ponte quando sua remoção de G o desconecta.
- Grafos 2-conexos (biconexos):
  - um grafo é biconexo em vértices se e somente se não possuir articulações.
  - um grafo é biconexo em arestas se e somente se não possuir pontes.

- Denominamos componentes biconexas (ou blocos) de G aos subgrafos maximais de G que sejam biconexos em vértices, ou isomorfos a K_2.



Alguns resultados interessantes:

Lema 2.2 Seja $G(V,E)$ um grafo. Então

(i) cada aresta de G pertence a exatamente um bloco

(ii) um vertice v é articulação sse pertencer a mais de um bloco

Lema 2.3 Seja $G(V,E)$ um grafo conexo e $|V|>2$:

(i) Um vertice v é articulação sse existirem vértices $w, u \neq v$ t.q. v está contido em todo caminho entre u e w

(ii) Um aresta $(p,q) \in E$ é ponte sse p,q for o único caminho simples entre p e q.

Lema 2.4 Um grafo $G(V,E)$, $|V|>2$ é biconexo sse cada par de vértice está contido em algum ciclo.

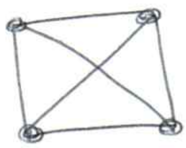
Teorema 2.6 Seja G um grafo k-conexo. Então existe algum ciclo passando por cada subconjunto de k vértices.

Teorema 2.7 Um grafo $G(V,E)$ é k-conexo sse existirem k caminhos disjuntos (exceto pelos extremos) entre cada par de vértices de G.

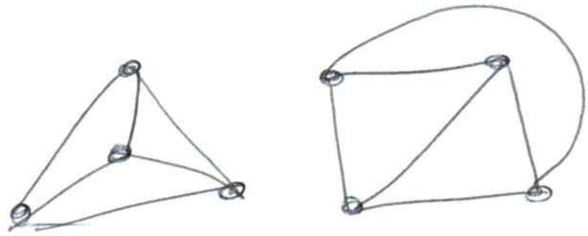
PLANARIDADE

- Representação plana quando não há cruzamento de linhas; grafo planar quando admite alguma representação plana.

K_4 é planar?



⋮

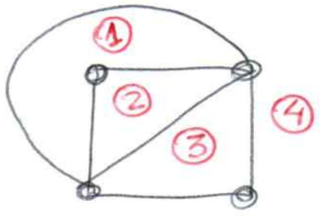


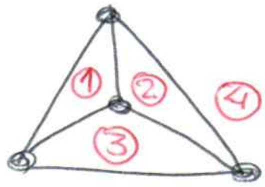
Sim! É planar!

E este outro, é planar?

- Grafo imersível em uma superfície S quando podemos desenhar o grafo sobre S sem cruzar linhas.

- Considere uma representação plana de G num plano P. As linhas dividem o plano em regiões denominadas faces; número de faces = f.





4 faces (contando com 1 externa)

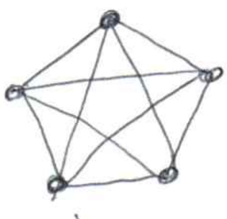
Teorema 4.8 Seja G um grafo planar.
Então $n + f = m + 2$.

Lema 2.5 Seja G um grafo planar.
Então $m \leq 3n - 6$

Lema 2.6 Os grafos K_5 e $K_{3,3}$ não são planares.

Prova Para K_5: não satisfaz Lema 2.5 pois $n=5, m=10$

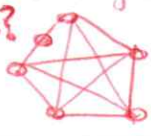
Para $K_{3,3}$: se fosse planar, $f = m - n + 2 = 5$;
cada face com pelo menos 4 arestas;
cada aresta pertence a 2 faces;
logo $2m \geq 4f$, porém $m = 9$, $f = 5$;
contradição



K_5

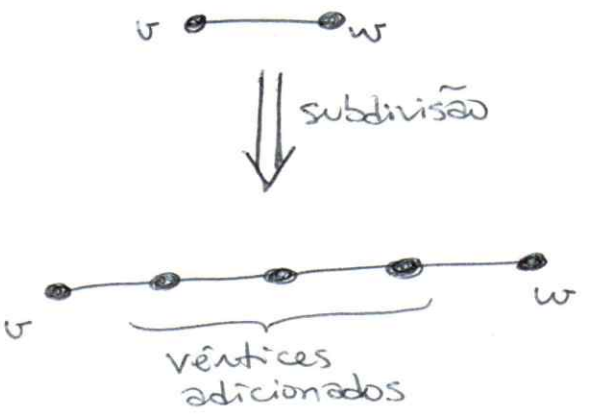
$K_{3,3}$

OBSERVAÇÃO: Se um grafo tiver K_5 ou $K_{3,3}$ como subgrafo, ele não pode ser planar, claro! Mas e se tiver o seguinte, por exemplo?



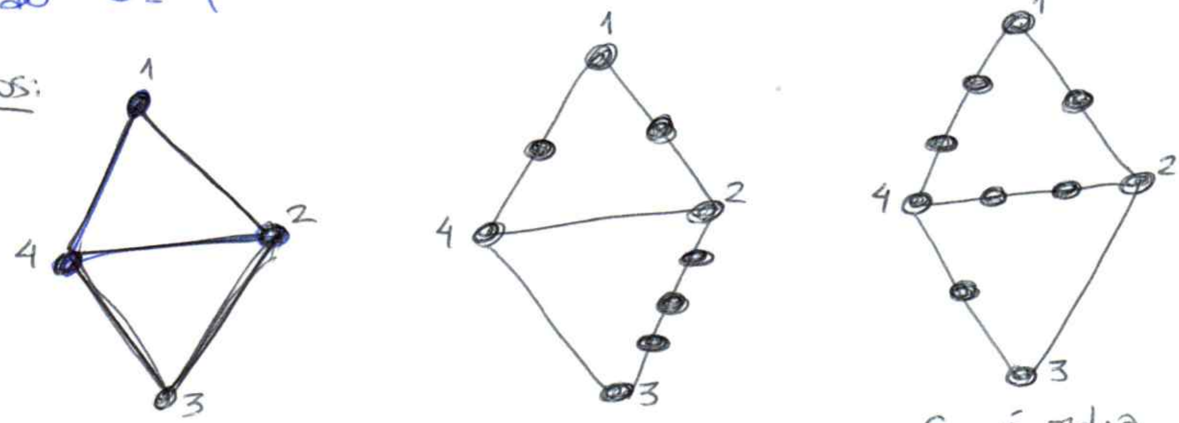
O que vocês acham?

- Denomina-se **subdivisão de uma aresta** (v,w) de um grafo G a uma operação que transforma (v,w) num caminho $v, z_1, \ldots, z_k, w$, $k \geq 0$



- Um grafo G_2 é uma **subdivisão** de um grafo G_1 quando G_2 pode ser obtido a partir de G_1 por subdivisões

Exemplos:



G

G_1 é uma subdivisão de G

G_2 é outra subdivisão de G

... etc

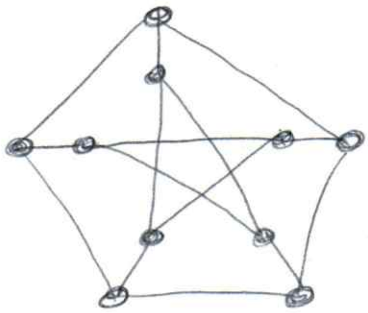
Finalmente, podemos apresentar o importante teorema abaixo:

Teorema 2.9 (caracterização de grafos planares) Kuratowski (1930)

Um grafo é planar se e somente se não contém como subgrafo uma subdivisão de K_5 ou de $K_{3,3}$.

Prova $\Rightarrow$ é fácil, mas $\Leftarrow$ não é!

Exemplo:

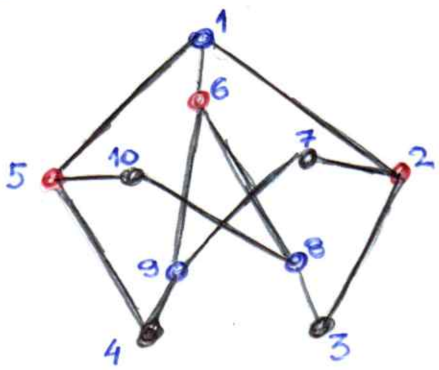


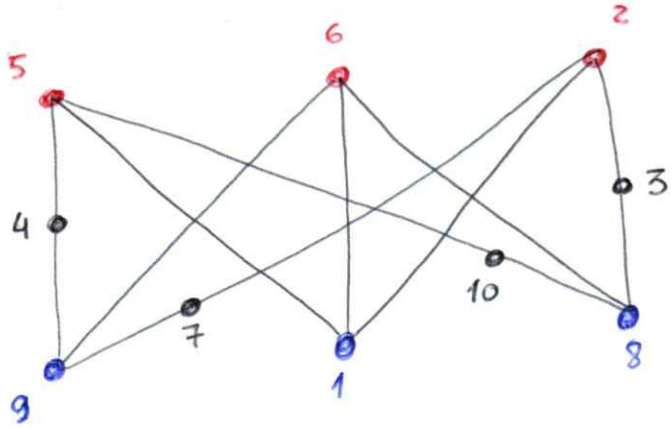
O grafo de Petersen é planar?

Será que ele possui subdivisão de K_5 como subgrafo?

Será que ele possui subdivisão de $K_{3,3}$ como subgrafo?

Dica: o subgrafo abaixo é uma subdivisão de $K_{3,3}$





CICLOS HAMILTONIANOS

- Não se conhece uma caracterização satisfatória (condições necessárias e suficientes) para grafos Hamiltonianos.

- Não se conhece algoritmo eficiente para decidir se um grafo possui ciclo Hamiltoniano.

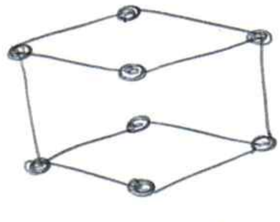
- No entanto, há alguns resultados interessantes, ainda que parciais.

Fato: Todo grafo Hamiltoniano é biconexo em vértices.

Por que?

- Será que a recíproca é verdadeira? Um grafo biconexo em vértices é Hamiltoniano?

Não!



Dois teoremas interessantes:

Teorema 2.10 Seja $G(V,E)$ um grafo Hamiltoniano e S um subconjunto próprio de V. Então o número de componentes conexas de $G-S$ é $\leq |S|$.

Teorema 2.11 Seja $G(V,E)$ um grafo com pelo menos 3 vértices e tal que $grau(v) \geq n/2$, para todo vértice $v \in V$. Então G é Hamiltoniano.

COLORAÇÃO

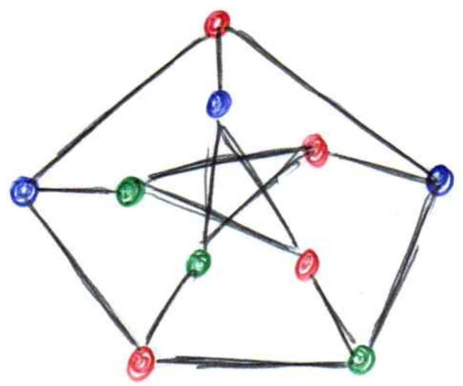
- Estudo de coloração começou com o problema das quatro cores, que já mencionamos na primeira aula. Vejam slides da Prof. Celina na página do curso.

- Seja $G(V,E)$ um grafo e $C = \{c_1, c_2, \dots\}$ um conjunto de cores. Uma coloração de G é uma atribuição de alguma cor de C para cada vértice de V, de modo que dois vértices adjacentes tenham cores diferentes.

  Ou seja, uma função $f: V \to C$ t.q. $\forall v, w \in V$ tem-se que
  $$(v,w) \in E \Rightarrow f(v) \neq f(w)$$

- Uma k-coloração de G é uma coloração que utiliza um total de k cores.
- Diz-se que G é k-colorível
- Denomina-se número cromático, denotado $\chi(G)$ ao menor número de cores k para o qual existe uma k-coloração de G.
- Uma coloração que usa o número mínimo de cores é uma coloração mínima

Exemplo



O grafo de Petersen é 3-colorível.

Lema 2.7 Um grafo $G(V,E)$ é bicolorível se e somente se for bipartido.

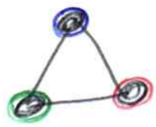
- É fácil decidir se um grafo G possui $\chi(G)=2$.
Será que é fácil decidir se $\chi(G)=3$? Ou se $\chi(G)=4$, etc?

NÃO! É em geral muito ifícil.

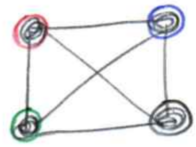
- Problemas relacionados

coloração ----- clique ----- conjuntos independentes

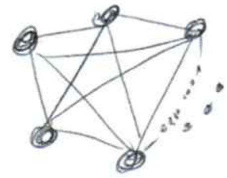
- Um grafo G é <u>k-crítico</u> quando $\chi(G)=k$ e para todo subgrafo próprio H de G temos $\chi(H)<k$.



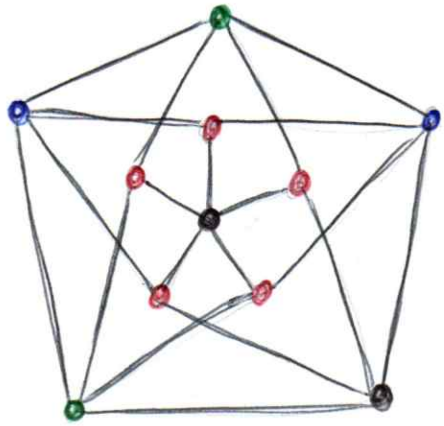
K_3 é 3-crítico



K_4 é 4-crítico



K_n é n-crítico. Concordam?



um grafo 4-crítico

- Como coloração de mapas se relaciona com coloração de grafos?