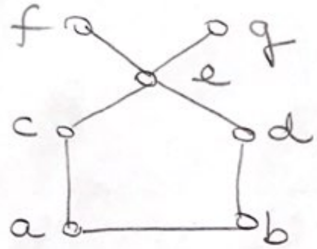
8 Emparelhamentos

Considere $G = (V, E)$ um grafo.
Um emparelhamento M é um subconjunto de E tal que nenhum par de arestas em M tem extremo comum.



$M_1 = \{(c,e), (b,d)\}$
$M_2 = \{(e,g), (a,c), (b,d)\}$
são dois emparelhamentos

Se $e \in M$, então os extremos de e são emparelhados por M, ou M-emparelhados. Se $e = (v, w)$ é aresta de M, então v e w são saturados por M, ou M-saturados. Se v não é extremo de aresta de M, então v é não M-saturado ou livre.
As arestas em M são arestas emparelhadas.
O conjunto vazio define um emparelhamento.
Uma única aresta também. Se M é um emparelhamento, então qualquer subconjunto $M' \subseteq M$ também é.
M é emparelhamento máximo se tem o número máximo de arestas, isto é, não existe M' emparelhamento com $|M'| > |M|$.
M é emparelhamento maximal se não existe M' emparelhamento com $M' \supset M$.
M é emparelhamento perfeito se M satura todos os vértices.

um caminho $P = u_1, u_2, \dots, u_k$ é alternante se as arestas $(u_1,u_2), (u_3,u_4) \dots$ são livres enquanto que as arestas $(u_2,u_3), (u_4,u_5) \dots$ são emparelhadas.

Um caminho alternante é aumentante caso u_1 e u_k sejam livres.

Assim como no problema de fluxo máximo, também usaremos caminhos aumentantes para resolver o problema de emparelhamento máximo.

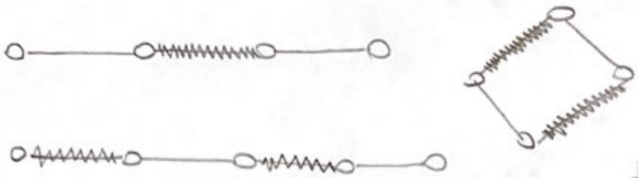
* Teorema de Berge sobre caminhos aumentantes:
Um emparelhamento M tem cardinalidade máxima se e somente se não existe caminho M-aumentante
prova: suponha que G admite caminho M-aumentante P, logo P tem um número par de vértices:
$P = v_0, v_1, \dots, v_{2l+1}$. Defina M' outro emparelhamento

$$M' = M \setminus \{(v_1,v_2), (v_3,v_4), \dots, (v_{2m-1}, v_{2m})\}$$
$$\cup \{(v_0,v_1), (v_2,v_3), \dots, (v_{2m}, v_{2m+1})\}$$

M' também é emparelhamento e $|M'| = |M| + 1$, logo M não é máximo.

Por outro lado, se M não tem cardinalidade máxima, considere M' emparelhamento máximo, logo $|M'| > |M|$. Denote por $M \triangle M'$ a diferença simétrica de M e M', isto é, as arestas que estão na união $M \cup M'$ mas não na intersecção $M \cap M'$. E considere o grafo $H = G[M \triangle M']$, façamos um diagrama:

Como cada vértice em H tem grau 1 ou 2,



porque cada vértice é incidente a no máximo uma aresta de M e uma de M'.

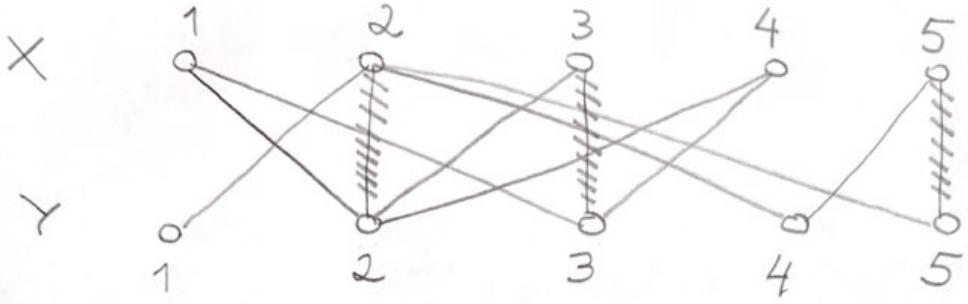
Portanto cada componente é um ciclo par com arestas alternadamente em M e em M', ou um caminho com arestas alternadamente em M e M'. Como $|M'| > |M|$, o grafo H tem mais arestas de M' do que M e alguma componente conexa de H é um caminho Q que começa e termina com arestas de M'. Logo Q começa e termina com vértices não M-saturados, e Q é um caminho M-aumentante. ▨

Lembre que quando estudamos fluxo máximo em redes, os vários algoritmos apresentados trataram da procura por caminhos aumentantes na rede residual.

* Teorema de Hall sobre emparelhamento para grafos bipartidos:
Seja G um grafo bipartido com bipartição X, Y. Então G admite emparelhamento que satura todo vértice de X se e somente se $|N(S)| \geq |S|$, $\forall S \subseteq X$.

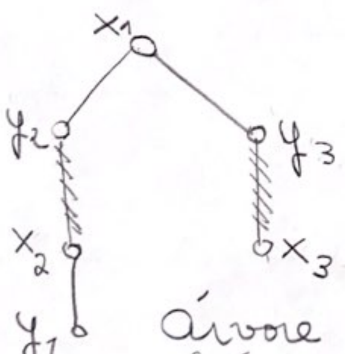
prova: Suponha que G contém um emparelhamento que satura todo vértice de X e seja $S \subseteq X$. Como os vértices de S estão emparelhados em M com vértices distintos em $N(S)$, nós temos $|N(S)| \geq |S|$.
Por outro lado, suponha que G é um grafo bipartido que satisfaz $|N(S)| \geq |S|$, para todo $S \subseteq X$, mas que G não admite emparelhamento que satura todo vértice de X. Seja M um emparelhamento máximo em G e seja u um vértice não M-saturado em X. Seja Z o conjunto dos vértices que são atingíveis a partir de u por caminhos M-alternantes. Como M é emparelhamento máximo, u é o único vértice não M-saturado em Z. Defina $S = Z \cap X$ e $T = Z \cap Y$. Como os vértices de $S \setminus \{u\}$ estão emparelhados por M com vértices de T, temos $|T| = |S| - 1$. Além disso, temos $T \subseteq N(S)$, já que todo vértice de T, estando num caminho M-alternante a partir de u, é vizinho de u ou é vizinho de algum vértice em X que está num caminho M-alternante a partir de u, i.e. vizinho de algum vértice de S. Na verdade, $N(S) \subseteq T$, já que todo vértice em $N(S)$, ou é vizinho de u ou é vizinho de algum vértice de $S \setminus \{u\}$ e portanto está conectado a u por um caminho M-alternante. Logo $|N(S)| = |T| = |S| - 1 < |S|$, o que contradiz a hipótese. $\blacksquare$

A17-5

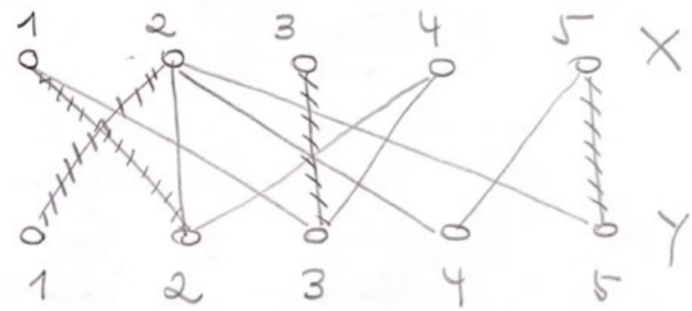


Comece com $M = \{x_2y_2, x_3y_3, x_5y_5\}$
M é emparelhamento máximo?
Berge: se e somente se não existe caminho M-aumentante

Construimos árvore aumentante H a partir do vértice x_1: $S = \{x_1\}$ e $T = \emptyset$. Seja $y_2 \in N(S) \setminus T$. Como a aresta $y_2x_2 \in M$, atualizamos $S = \{x_1, x_2\}$ e $T = \{y_2\}$. Seja $y_3 \in N(S) \setminus T$. Como a aresta $y_3x_3 \in M$, atualizamos $S = \{x_1, x_2, x_3\}$ e $T = \{y_2, y_3\}$. Seja $y_1 \in N(S) \setminus T$. Como y_1 não é M-saturado, encontramos $P = x_1 y_2 x_2 y_1$ caminho aumentante

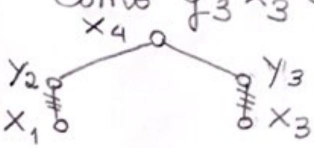


Árvore húngara



$M = \{x_1y_2, x_2y_1, x_3y_3, x_5y_5\}$

$S = \{x_4\}$ e $T = \emptyset$. Seja $y_2 \in N(S) \setminus T$. Como $y_2x_1 \in M$, atualizamos $S = \{x_1, x_4\}$ e $T = \{y_2\}$. Seja $y_3 \in N(S) \setminus T$. Como $y_3x_3 \in M$, temos $S = \{x_1, x_3, x_4\}$ e $T = \{y_2, y_3\}$.

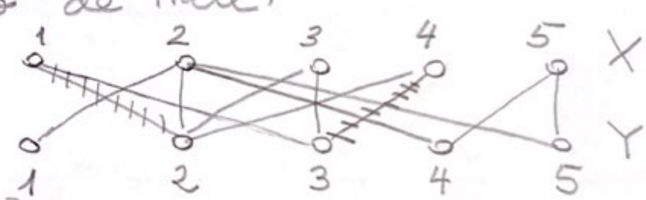


Como $N(S) = T$, Hall dá a condição de parada.
M é máximo.

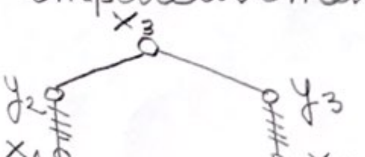
Os dois teoremas de Hall e de Berge justificam a corretude do algoritmo: comece com um emparelhamento M. Caso M não sature o conjunto X, procure caminho M-aumentante P a partir de $u \in X$, um vértice não M-saturado.
Caso P exista, defina $M^* = M \triangle E(P)$,
Caso P não exista, encontre o conjunto Z dos vértices alcançáveis a partir de u por caminhos M-alternantes e teremos o conjunto $S = Z \cap X$ que dá a condição de parada $|N(S)| < |S|$

O algoritmo encontra um emparelhamento que satura todo vértice de X ou encontra $S \subseteq X$ que não satisfaz a condição de Hall.

Voltemos ao exemplo:



Comece com $M = \{x_1 y_2, x_4 y_3\}$
Construa árvore aumentante H a partir do vértice x_3:
$S = \{x_3\}$ e $T = \emptyset$. Seja $y_2 \in N(S) \setminus T$. Como $y_2 x_1 \in M$, atualizamos $S = \{x_1, x_3\}$ e $T = \{y_2\}$. Seja $y_3 \in N(S) \setminus T$. Como $y_3 x_4 \in M$, atualizamos $S = \{x_1, x_3, x_4\}$ e $T = \{y_2, y_3\}$
Como $N(S) = T$, o teorema 2 garante que não há emparelhamento que sature todo vértice de X.



árvore húngara

Neste caso o algoritmo não termina com emparelhamento máximo.