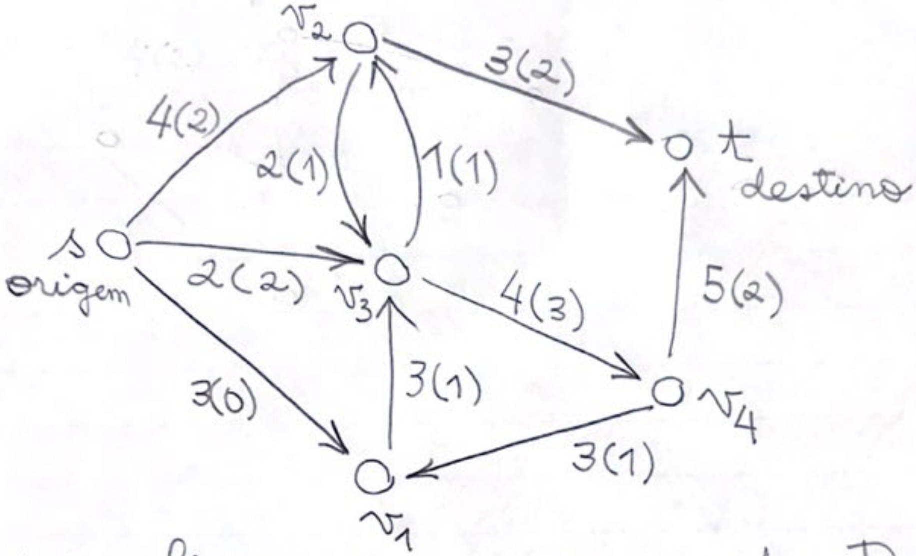
6 Fluxo Máximo em Redes



um fluxo f numa rede D

rede: grafo direcionado $D(V, E)$,
$c: E \longrightarrow (0, +\infty)$ cada aresta tem uma
$e \longmapsto c(e)$ capacidade, e
dois vértices $s, t \in V$, $s \neq t$, $d^-(s) = d^+(t) = 0$

fluxo f de s a t na rede D
$f: E \longrightarrow [0, +\infty)$ cada aresta tem um
$e \longmapsto f(e)$ fluxo, que
respeita $0 \leq f(e) \leq c(e)$
conserva $\sum_{w_1} f(w_1, v) = \sum_{w_2} f(v, w_2)$, $\forall v \in V \setminus \{s, t\}$ omitimos parênteses!

Observe: Toda rede D admite o fluxo $f(e) = 0, \forall e \in E$.

$\forall v \in V$, $\sum_{w} f(w, v)$ valor do fluxo em v

vértices especiais $\sum_{w} f(s, w) = \sum_{w} f(w, t) = f(D)$
valor do fluxo em s $=$ ... em t $=$ ... em D
Lema 6.1

Problema do Fluxo máximo:
Dados: Rede D.
Objetivo: O valor do fluxo máximo para D.

Considere uma rede D com um fluxo f.
$e \in E$ é saturada se $f(e) = c(e)$
$v \in V$ é saturado se todas as arestas convergentes a v ou todas as arestas divergentes a v estão saturadas.

fluxo maximal: todo caminho de s a t contém alguma aresta saturada.

Todo fluxo máximo é maximal.
Figura 6.2 (a) fluxo maximal e não máximo

$S \subseteq V$, $s \in S$ e $t \notin S$, $\overline{S} = V - S$
Corte $(S, \overline{S}) = \{(v,w) : v \in S \text{ e } w \in \overline{S}, \text{ ou } v \in \overline{S} \text{ e } w \in S\}$
Todo caminho de s a t tem aresta de $(S, \overline{S})$

$$(S, \overline{S})^+ = \{(v,w) : v \in S,\ w \in \overline{S}\}$$
$$(S, \overline{S})^- = \{(v,w) : v \in \overline{S},\ w \in S\}$$

capacidade do corte $c(S, \overline{S}) = \sum_{e \in (S,\overline{S})^+} c(e)$

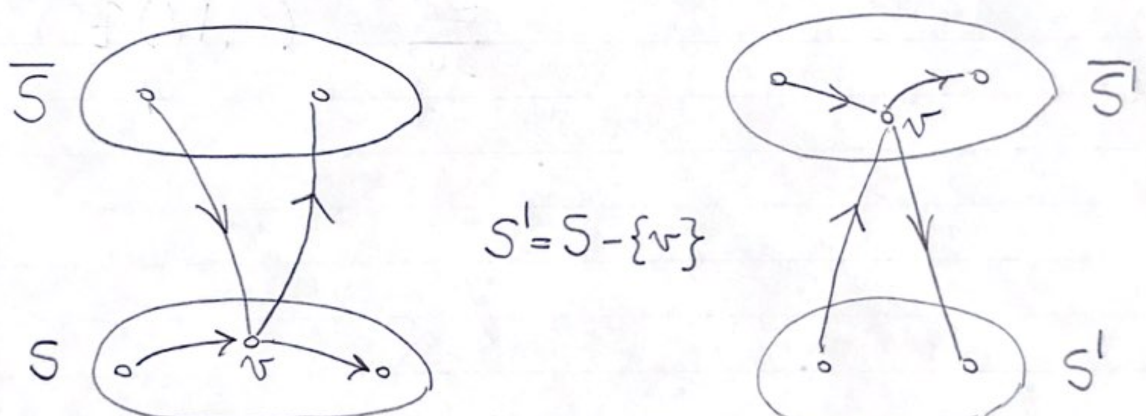
Corte mínimo é o corte de menor capacidade

fluxo no corte $f(S, \overline{S}) = \sum_{e \in (S,\overline{S})^+} f(e) - \sum_{e \in (S,\overline{S})^-} f(e)$

Lema 6.1 Sejam f um fluxo e $(S,\overline{S})$ um corte em D. Então $f(S,\overline{S}) = f(D)$.

prova: Por indução na cardinalidade de S.
A base é $|S|=1$, $S=\{s\}$ e $f(S,\overline{S})=f(D)$ porque definimos assim.
Suponha $|S|>1$ e seja $v \in S \setminus \{s\}$.
Para $W \subseteq V \setminus \{v\}$, considere as somas:

$$f(v,W)=\sum_{w\in W} f(v,w), \quad f(W,v)=\sum_{w\in W} f(W,v)$$



$S' = S - \{v\}$

$$f(S,\overline{S}) = \underbrace{f(S',\overline{S}')}_{=f(D),\ \text{pela H.I.}} \underbrace{-f(S',v)+f(v,S')+f(v,\overline{S})-f(\overline{S},v)}_{=\text{zero, pela conservação em } v}$$

Observe que o menor conjunto S é $S=\{s\}$ e o maior é $S = V\setminus\{t\}$, para ambos

$$f(\{s\}, V\setminus\{s\}) = f(V-\{t\},\{t\}) = f(D)$$

fluxo na origem   fluxo no destino

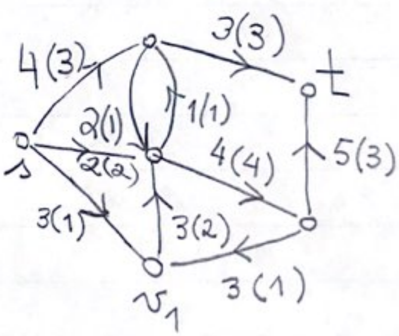
Seja f um fluxo em uma rede D.

aresta direta satisfaz $c(e) - f(e) > 0$
aresta contrária satisfaz $f(e) > 0$
rede residual $D'(f)$ tem mesmo V e arestas:

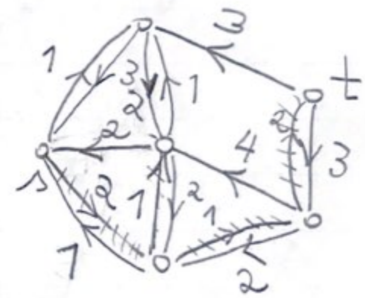
(v,w) aresta direta em $D \Rightarrow (v,w)$ aresta de $D'(f)$, chamada de aresta direta em D' com $c'(v,w) = c(v,w) - f(v,w)$
(v,w) aresta contrária em $D \Rightarrow (w,v)$ aresta de $D'(f)$, chamada de aresta contrária em D' com $c'(w,v) = f(v,w)$.

Um caminho de s a t em $D'(f)$ é aumentante para f.
No exemplo:

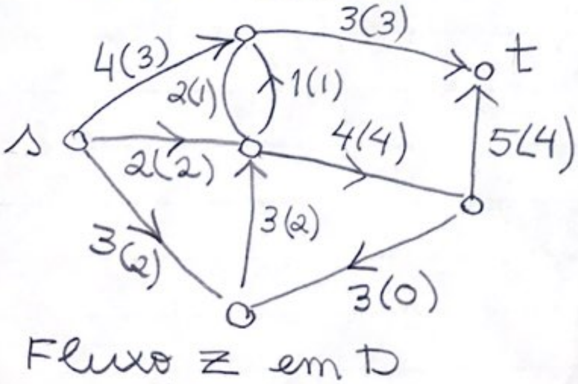
$D'(f)$
2 caminhos aumentantes de arestas diretas



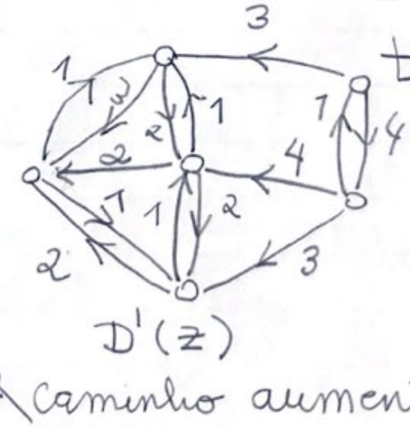
Fluxo h em D
maximal e não máximo



$D'(h)$
1 caminho aumentante com aresta contrária



Fluxo z em D máximo



$D'(z)$
$\nexists$ caminho aumentante

Lema 6.2 Sejam f um fluxo em uma rede $D(V,E)$ e $D' = D'(f)$ a sua rede residual. Se existe caminho aumentante $v_1, \dots, v_k$ em D', então $f(D)$ pode ser aumentado de

$$F' = \min \{ c'(v_j, v_{j+1}) \mid 1 \leq j < k \}.$$

Prova: Construa um novo fluxo f' em D de valor $f(D) + F'$. Para cada aresta do caminho aumentante, com $1 \leq j < k$, a receita é:

(v_j, v_{j+1}) é direta em $D' \Rightarrow f'(v_j, v_{j+1}) = f(v_j, v_{j+1}) + F'$,

(v_j, v_{j+1}) é contrária em $D' \Rightarrow f'(v_j, v_{j+1}) = f(v_j, v_{j+1}) - F'$.

As outras arestas de D não mudam $f'(x,y) = f(x,y)$.
A função f' respeita e conserva.

$$f'(D) = f(D) + [f'(s, v_2) - f(s, v_2)] = f(D) + F'. \blacksquare$$

Corolário: f é máximo em $D \Longrightarrow$
$\nexists$ caminho aumentante em $D'(f)$.

Observe que qualquer fluxo f em D e qualquer corte $(S, \overline{S})$ em D satisfazem

$$f(D) = f(S, \overline{S}) = \sum_{e \in (S,\overline{S})^+} f(e) - \sum_{e \in (S,\overline{S})^-} f(e) \leq \sum_{e \in (S,\overline{S})^+} c(e) = C(S,\overline{S})$$

Teorema 6.1 O valor do fluxo máximo em uma rede D é igual a capacidade do corte mínimo.

prova: Os dois valores satisfazem $f_{max} \leq c_{min}$

Vamos exibir um fluxo e um corte com o mesmo valor. Vamos exibir um corte cujo valor é f_{max}. Logo, o corte é mínimo. Seja f máximo em D e defina o conjunto:

$S = \{s\} \cup \{v \mid$ existe caminho de s até v em $D'(f)\}$

$$f(S,\bar{S}) = \sum_{e \in (S,\bar{S})^+} f(e) - \sum_{e \in (S,\bar{S})^-} f(e)$$

$$= \sum_{e \in (S,\bar{S})^+} c(e) = c(S,\bar{S}).$$

Porque toda aresta $e \in (S,\bar{S})^+$ está saturada e toda aresta $e \in (S,\bar{S})^-$ tem $f(e)=0$. ∎

Corolário: f é máximo em D $\Longleftrightarrow$ $\nexists$ caminho aumentante em $D'(f)$

prova: ($\Longrightarrow$) $\exists$ caminho aumentante em $D'(f)$, pelo Lema 6.2 podemos aumentar f.

($\Longleftarrow$) $\nexists$ caminho aumentante em $D'(f)$, o corte definido por $S=\{s\} \cup \{$alcançáveis$\}$ satisfaz $c(S,\bar{S}) = f(D)$.

Portanto f é máximo em D. ∎

A14-1

Algoritmos para fluxo máximo

Ford-Fulkerson $\mathcal{O}(m \cdot \underset{\uparrow}{F})$

valor do fluxo máximo

F iterações de redes residuais, onde m é o custo da busca por caminho aumentante em cada residual.

Karp $\mathcal{O}(n\, m^2)$

considera caminhos aumentantes em ordem não decrescente

temos n possíveis tamanhos de caminho aumentante

para cada tamanho, uma aresta não pode ser reutilizada.

m é o custo da busca por caminho aumentante em cada residual.

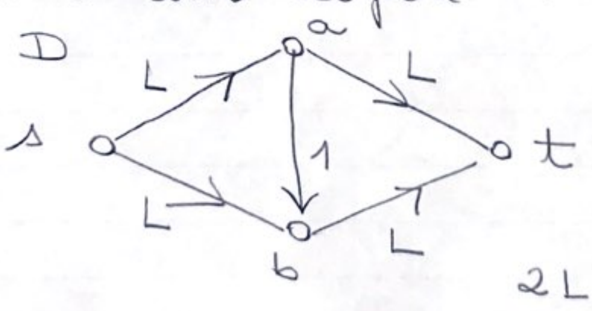
Dinic $\mathcal{O}(n^2 m)$

constrói rede de camadas, subrede da residual, descarta vértices e arestas que não estão em menor caminho aumentante.

O Teorema 6.1 do fluxo máximo igual ao corte mínimo fornece o primeiro algoritmo a partir do fluxo trivial $f(e)=0$ para toda aresta, considera $D = D'(f)$, procura na rede residual um caminho aumentante e aplica o Lema 6.2.
Se a rede D tem capacidades inteiras, então $f(D)$ é um inteiro, e após $F=f(D)$ iterações de construção de rede residual em relação ao fluxo corrente, busca de caminho aumentante, e aumento do fluxo, obtemos o fluxo de valor F.

A condição de parada é:
enquanto existir caminho aumentante na rede residual.

A complexidade é $\mathcal{O}(m(F+1) = \mathcal{O}(mF)$.
Como F pode ser exponencial em m, buscamos um algoritmo polinomial em m.

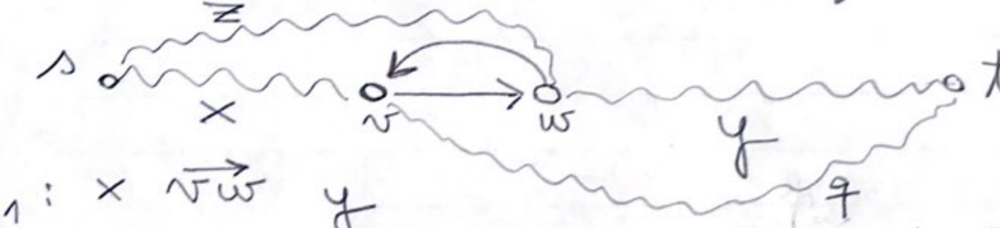


$f(D) = 2L$
1º $sabt$
2º $sbat$
⋮
$2L$ iterações

ideia: Considerar caminhos aumentantes em ordem não decrescente do seu comprimento, seu número de arestas.
1º sat; 2º sbt 2 iterações

Lema 6.3 seja f_1 um fluxo em uma rede D e k o comprimento do menor caminho aumentante p_1 para f_1. Seja f_2 o fluxo obtido em D pelo aumento de f_1 através de p_1, usando o Lema 6.2. Então o comprimento do menor caminho aumentante p_2 para f_2, caso exista é pelo menos k.

Prova: Compare as duas residuais $D'(f_1)$ e $D'(f_2)$. Suponha que existe p_2 em $D'(f_2)$ que satisfaz $|p_2| < |p_1|$.
Como p_1 é caminho mínimo em $D'(f_1)$, o caminho p_2 precisa usar aresta que está em $D'(f_2)$ mas não em $D'(f_1)$.
As novas arestas vêm de arestas diretas (v, w) em p_1 com $f_1(v,w) = 0$, porque ganham fluxo ao definir f_2 e originam aresta contrária (w, v) em $D'(f_2)$.



$p_1 : x \; \vec{vw} \; y$

$p_2 : z \; \vec{wv} \; q$

$|p_1| = |x| + |y| + 1$

$|p_2| = |z| + |q| + 1$

por hipótese $|p_2| < |p_1|$, logo $|z| + |q| < |x| + |y|$
Como p_1 é mínimo, $|z| \geq |x| + 1$ e $|q| \geq |y| + 1$.
Logo $|z| + |q| \geq |x| + |y| + 2$, contraria a hipótese. ∎

Observação: se p_1 é caminho mínimo em $D'(f_1)$ e (v,w) é a aresta de menor capacidade de p_1, então (v,w) não pode ser reutilizada em outro caminho aumentante de comprimento $|p_1|$.

Prova: O fluxo f_2 satura a aresta (v,w), logo em $D'(f_2)$ não temos (v,w) e temos (w,v).
Para que (v,w) seja reutilizada, é necessário que a aresta (w,v) pertença a caminho aumentante.

$p_1: x \; \overrightarrow{vw} \; y$

a aresta wv só pode pertencer a caminho aumentante a comprimento maior que $|p_1|$. ▨

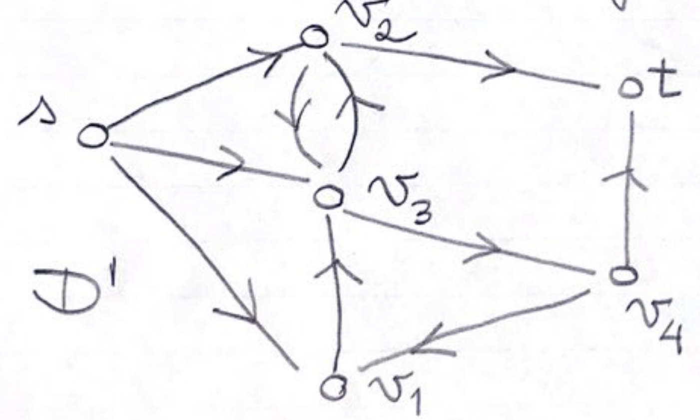
O algoritmo considera caminhos aumentantes em ordem de tamanho do menor para o maior.
Temos $O(n)$ tamanhos, para cada tamanho $1 \leq k < n$, temos $O(m)$ caminhos aumentantes.

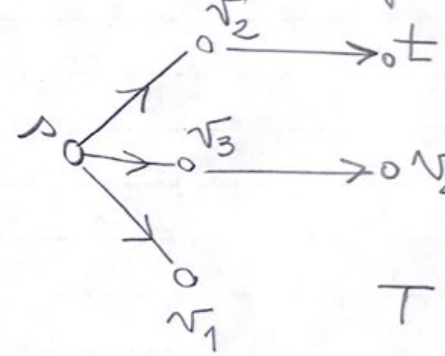
a complexidade é $O(n \cdot m^2)$ polinomial.

A1.4-5

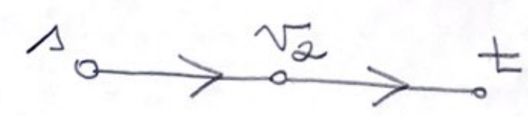
A rede de camadas $D^*(f)$ é uma subrede de $D'(f)$, obtida ao remover vértices e arestas que não podem pertencer ao menor caminho aumentante:

T: árvore de largura com raiz s.
descarte arestas (v, w) com
nível $v \geq$ nível w em T
considere $v_1, \dots, v_n$ vértices de D' em ordem não decrescente de nível em T
descarte vértices $v_j \neq t$ com $\text{grau}^+(v_j) = 0$.



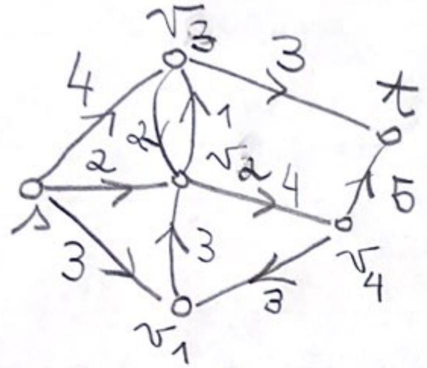
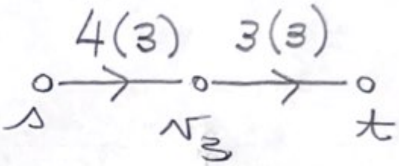
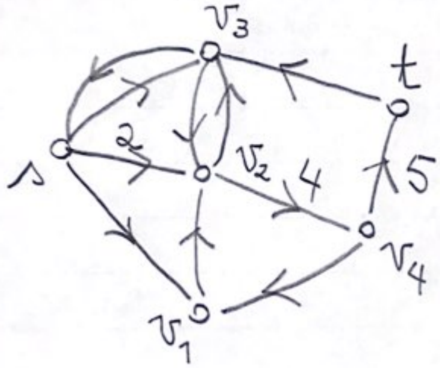
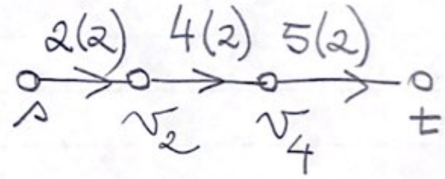
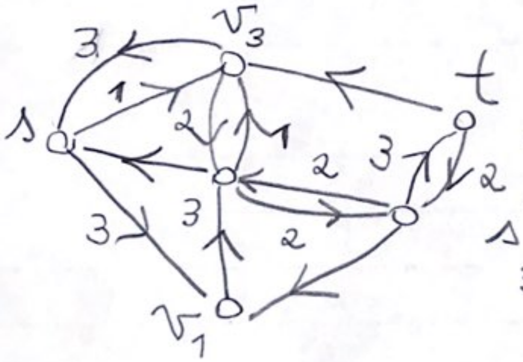
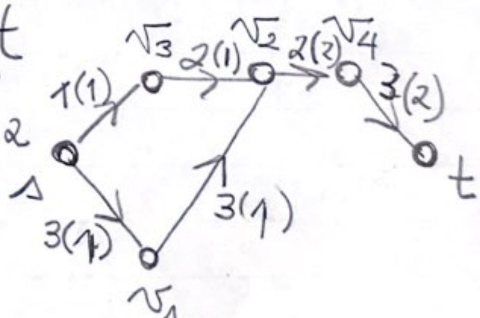


D^*

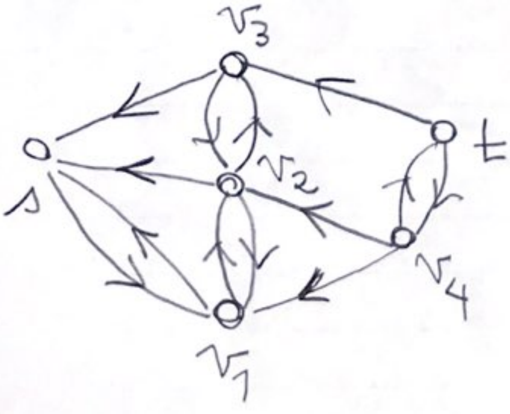


O algoritmo consiste em encontrar para cada comprimento um fluxo maximal numa rede de camadas.

A14 - 6

Rede residual D'	Rede de Camadas D^*	caminho aumentante
		$s\,v_2\,t$ fluxo maximal 3
		$s\,v_2\,v_4\,t$ fluxo maximal 2
		$s\,v_3\,v_2\,v_4\,t$ $s\,v_1\,v_2\,v_4\,t$ fluxo maximal 2

observe que
há outro maximal considerando
$s\,v_1\,v_2\,v_4\,t$ antes.



fluxo máximo

$3+2+2=7$