GAN00166: Lógica para Ciência da Computação

**Texto da Aula 9**

# Demonstrações Indiretas

*Petrucio Viana*
Departamento de Análise, IME–UFF

---

## Sumário



---

Este texto é uma versão preliminar. Qualquer sugestão para melhorá-lo é bem vinda!!!

# 1 Demonstrações diretas

Na Aula 8, descrevemos, em linhas gerais, um dos principais procedimentos usados pelos matemáticos para justificar uma conclusão $\varphi$ a partir de hipóteses $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ (quando não estamos diante de um passo lógico). Este método pode ser resumido do seguinte modo:

> Para demonstrar $\varphi$ partir de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, basta fazer o seguinte:
>
> 1. Supor $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$.
> 2. Examinar $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ de modo a elaborar passos lógicos que levem a enunciados intermediários que, por sua vez, levem a demonstração de $\varphi$.

**Exemplo 1** (a) Consideremos o seguinte argumento:

$$\frac{\begin{array}{c} p \to q \\ q \to r \\ r \to s \\ s \to t \end{array}}{p \to t} \tag{1}$$

O argumento (1) é válido ou não?

Vamos responder a esta pergunta positivamente, apresentando uma demonstração da sua validade:

$$\begin{array}{lll}
 & & \text{Suponhamos que:} \\
 & 1. & p \to q \\
 & 2. & q \to r \\
 & 3. & r \to s \\
 & 4. & s \to t \\
 & & \text{Daí, temos:} \\
1, 2 & 6. & p \to r \\
3, 6 & 7. & p \to s \\
4, 7 & 8. & p \to t, \quad \text{q.e.d.}
\end{array}$$

Para verificar que esta demonstração está correta, basta observar que ela é construída por 3 aplicações sucessivas de um único passo lógico:

$$\frac{\begin{array}{c} \varphi \to \psi \\ \psi \to \theta \end{array}}{\varphi \to \theta}$$

Como o passo lógico é válido, o problema está resolvido.

(b) Consideremos o seguinte argumento:

$$\begin{array}{l} \neg(a \wedge b) \\ c \vee b \\ d \rightarrow \neg c \\ \hline a \rightarrow \neg d \end{array} \qquad (2)$$

O argumento (2) é válido ou não?

Vamos responder a esta pergunta positivamente, apresentando uma demonstração da sua validade:

| | | |
|---|---|---|
| | | Suponhamos que: |
| | 1. | $\neg(a \wedge b)$ |
| | 2. | $c \vee b$ |
| | 3. | $d \rightarrow \neg c$ |
| | | Daí, temos: |
| 1 | 4. | $\neg a \vee \neg b$ |
| 4 | 5. | $a \rightarrow \neg b$ |
| 2 | 6. | $\neg\neg b \vee c$ |
| 6 | 7. | $\neg b \rightarrow c$ |
| 5, 7 | 8. | $a \rightarrow c$ |
| 3 | 9. | $c \rightarrow \neg d$ |
| 8, 10 | 10. | $a \rightarrow \neg d$, q.e.d. |

Para verificar que esta demonstração está correta, basta observar que ela é construída por aplicações do passo lógico já usado no Exemplo 1(a) e, também, dos seguintes passos lógicos:

$$\frac{\neg(\varphi \wedge \psi)}{\neg\varphi \vee \neg\psi} \quad , \quad \frac{\neg\varphi \vee \psi}{\varphi \rightarrow \psi} \quad , \quad \frac{\varphi \vee \psi}{(\neg\neg\psi) \vee \varphi}$$

Como todos os passos lógicos são válidos, o problema está resolvido.

De maneira geral, podemos dizer que a demonstração da validade dos argumentos (1) e (2) foi construída pela execução dos seguintes passos:

1. análise das premissas;
2. aplicação de passos lógicos corretos às premissas para a obtenção de fórmulas intermediárias;
3. aplicação de passos lógicos corretos às premissas e às fórmulas intermediárias, para a obtenção da conclusão.

Este tipo de demonstração — que é o único que conhecemos até o momento — é chamado de *demonstração direta*, pois por seu intermédio demonstramos que $\varphi$ segue de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$,

> "utilizando um caminho" que parte de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ e segue diretamente para $\varphi$.

## 1.1 Observações

**Observação 1** Observe que os passos lógicos em destaque no Exemplo 1(b) são equivalências. De maneira geral, o uso de equivalências como passos lógicos é o que fornece uma grande flexibilidade na construção de demonstrações diretas.

## 1.2 Exercícios

**Exercício 1** Construir demonstrações diretas para a validade dos seguintes argumentos:

(i) $\dfrac{a \to b \quad b \to (a \to c) \quad a}{c}$

(ii) $\dfrac{a \to b \quad a \vee c \quad \neg d \vee e \quad e \to \neg c \quad d}{b}$

(iii) $\dfrac{a \to \neg b \quad c \vee b \quad d \to \neg c \quad d}{\neg a}$

(iv) $\dfrac{a \to (b \to c) \quad c \to \neg d \quad \neg e \to d \quad a \wedge b}{e}$

(v) $\dfrac{a \to b \quad \neg a \to (\neg c \vee d) \quad c \wedge \neg d}{b}$

(vi) $\dfrac{a \to (\neg b \wedge c) \quad \neg d \vee \neg c \quad d}{\neg a}$

(vii) $\dfrac{a \to b \vee c \quad a \to \neg b \quad c \to \neg d}{a \to \neg d}$

(viii) $\dfrac{a \to b \quad \neg a \to c \quad c \to \neg e \quad \neg b \to d}{\neg b \to (\neg e \wedge d)}$

(ix) $\dfrac{a \vee b \quad c \to \neg a \quad \neg b \to d \quad d \to c}{b}$

# 2 Olhe para a conclusão!

Refletindo um pouco, é fácil ver que para demonstrar a validade do Argumento 1, poderíamos ter feito uma demonstração de $p \to t$ a partir de $p \to q$, $q \to r$, $r \to s$, $s \to t$, por um caminho menos direto ou, melhor, não tão direto quanto aquele que tomamos no Exemplo 1.

**Exemplo 2** Queremos garantir que o argumento (1) é válido. Ou seja, queremos mostrar que em qualquer contexto em que as hipóteses $p \to q$, $q \to r$, $r \to s$, $s \to t$ são simultaneamente $V$, a conclusão $p \to t$ também é $V$.

> Para isto, vamos esquecer as hipóteses por um momento e vamos, primeiramente, examinar a conclusão.

Ao fazer isto, observamos que a conclusão é uma implicação.

Agora, de acordo com a tabela de avaliação do `se então`, para mostrar que uma implicação $\varphi \to \psi$ é $V$, basta mostrar que a verdade "não decresce", quando "passamos de $\varphi$ para $\psi$", ou seja, que não temos $V \to F$.

Assim, para mostrar que um argumento cuja premissa é uma implicação é válido, ou seja, para mostrar que uma implicação $\varphi \to \psi$ segue das hipóteses $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, basta mostrar que quando assumimos que as hipóteses são $V$, a verdade "não decresce", quando "passamos de $\varphi$ para $\psi$".

Agora, mostrar que a verdade "não decresce", quando "passamos de $\varphi$ para $\psi$", é o mesmo que mostrar que quando assumimos que $\varphi$ é $V$, temos que $\psi$ também é $V$.

Assim, para mostrar a validade do argumento (1), basta mostrar que o seguinte argumento é válido:

$$\begin{array}{l} p \\ p \to q \\ q \to r \\ r \to s \\ s \to t \\ \hline t \end{array} \tag{3}$$

Observe que obtivemos (3) a partir de (1) acrescentando $s$ — o antecedente da conclusão de (1) — às hipóteses de (3) e considerando $t$ — o consequente da conclusão de (1) — como a conclusão de (3).

A esta altura, não temos nenhuma dificuldade em construir uma demonstração direta da validade de (3) (este foi o primeiro exemplo de demonstração que fizemos no Texto da Semana 7, Parte 2):

Suponhamos que:

| | | |
|---|---|---|
| | 1. | $p$ |
| | 2. | $p \to q$ |
| | 3. | $q \to r$ |
| | 4. | $r \to s$ |
| | 5. | $s \to t$ |

Daí, temos:

| | | |
|---|---|---|
| 1, 2 | 6. | $q$ |
| 3, 6 | 7. | $r$ |
| 4, 7 | 8. | $s$ |
| 5, 8 | 9. | $t$, q.e.d. |

Para verificarmos que esta demonstração direta está correta, basta observarmos que ela é construída por 4 aplicações sucessivas do passo lógico:

$$\begin{array}{l} \varphi \\ \varphi \to \psi \\ \hline \psi \end{array}$$

Mas para considerarmos que o problema original está resolvido, ou seja, que demonstramos que o argumento (1) é válido — quando apresentamos apenas uma demonstração da validade do argumento (3) — também temos que nos convencer que a demonstração da validade de (3) realmente garante a validade de (1).

Observe que no Exemplo 2 (assim como no Exemplo 1(a)) queríamos demonstrar $p \to t$ a partir de $p \to q$, $q \to r$, $r \to s$, $s \to t$. Mas, na verdade, demonstramos

$t$ a partir de $p, p \rightarrow q$, $q \rightarrow r$, $r \rightarrow s$, $s \rightarrow t$. Ou seja, ao invés de demonstrar a validade do argumento dado, nós demonstramos a validade de um outro argumento, que construímos a partir do argumento dado, pela análise de sua conclusão, acrescentando uma hipótese ao argumento dado e mudando a sua conclusão.

Observe, ainda, que o argumento que contruímos a partir do argumento dado tem uma conclusão mais simples do que a do argumento dado.

**Exemplo 3** Consideremos o seguinte argumento:

$$\begin{array}{l} \neg p \vee r \\ \neg t \rightarrow \neg q \\ r \rightarrow s \\ \hline (p \wedge q) \rightarrow (s \wedge t) \end{array} \tag{4}$$

O argumento (4) é válido ou não?

Vamos responder a esta pergunta positivamente, apresentando uma demonstração da sua validade.

Queremos garantir que o argumento (4) é válido. Ou seja, queremos mostrar que em qualquer contexto em que as hipóteses $\neg p \vee r$, $\neg t \rightarrow \neg q$, $r \rightarrow s$ são simultaneamente $V$, a conclusão $(p \wedge q) \rightarrow (s \wedge t)$ também é $V$.

> Para isto, vamos esquecer as hipóteses por um momento e vamos, primeiramente, examinar a conclusão.

Ao fazer isto, observamos que a conclusão é uma implicação.

Agora, de acordo com o que vimos no Exemplo 2:

| |
|---|
| Para mostrar que uma implicação $\varphi \rightarrow \psi$ segue das hipóteses $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, basta mostrar que quando assumimos que as hipóteses e o antecedente $\varphi$ são $V$, o consequente $\psi$ também é $V$. |

Assim, para mostrar a validade do argumento (4), basta mostrar que o seguinte argumento é válido:

$$\begin{array}{l} p \wedge q \\ \neg p \vee r \\ \neg t \rightarrow \neg q \\ r \rightarrow s \\ \hline s \wedge t \end{array} \tag{5}$$

Observe que obtivemos (5) a partir de (4) acrescentando $p \wedge q$ — o antecedente da conclusão de (4) — às hipóteses de (5) e considerando $s \wedge t$ — o consequente da conclusão de (4) — como a conclusão de (5).

A esta altura, não temos nenhuma dificuldade em construir uma demonstração direta da validade de (5). Para isto, basta examinar as premissas e elaborar passos lógicos que nos levem diretamente à conclusão.

Mas, ao invés disto, vamos seguir novamente a diretriz adotada acima, quando analisamos os argumentos (1) e (4):

vamos esquecer as hipóteses por um momento e vamos, primeiramente, examinar a conclusão.

Ao fazer isto, observamos que a conclusão é uma conjunção.

Agora, de acordo com a tabela de avaliação do e, para mostrar que uma conjunção $\varphi \wedge \psi$ é $V$, basta mostrar que ambos os componentes $\varphi$ e $\psi$ são $V$, ou seja, que temos $V \wedge V$.

Logo, para mostrar que um argumento cuja conclusão é uma conjunção é válido, ou seja, para mostrar que uma conjunção $\varphi \wedge \psi$ segue das hipóteses $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, basta mostrar que quando assumimos que as hipóteses são $V$, temos garantidas as verdades de $\varphi$ e de $\psi$.

Assim, para mostrar a validade do argumento (5), basta mostrar que os dois argumentos seguintes são válidos:

$$\begin{array}{l} p \wedge q \\ \neg p \vee r \\ \neg t \rightarrow \neg s \\ r \rightarrow s \\ \hline s \end{array} \quad , \quad \begin{array}{l} p \wedge q \\ \neg p \vee r \\ \neg t \rightarrow \neg s \\ r \rightarrow s \\ \hline t \end{array}$$

Observe que obtivemos o argumento da esquerda a partir de (5) considerando $s$ — o primeiro componente da conclusão de (5) — como a conclusão do argumento da esquerda. De maneira similar, obtivemos o argumento da diretita a partir de (5) considerando $t$ — o segundo componente da conclusão de (5) — como a conclusão do argumento da direita.

A esta altura, não temos nenhuma dificuldade em construir demonstrações diretas da validade dos dois argumentos acima. De fato, para o argumento da esquerda, temos:

| | | |
|---|---|---|
| | Suponhamos que: | |
| | 1. | $p \wedge q$ |
| | 2. | $\neg p \vee r$ |
| | 3. | $\neg t \rightarrow \neg q$ |
| | 4. | $r \rightarrow s$ |
| | Daí, temos: | |
| 1 | 5. | $p$ |
| 2, 5 | 6. | $r$ |
| 4, 6 | 8. | $s$, q.e.d. |

Enquanto que para o argumento da direita, temos:

| | | |
|---|---|---|
| | Suponhamos que: | |
| | 1. | $p \wedge q$ |
| | 2. | $\neg p \vee r$ |
| | 3. | $\neg t \rightarrow \neg q$ |
| | 4. | $r \rightarrow s$ |
| | Daí, temos: | |
| 1 | 5. | $q$ |
| 3, 5 | 6. | $t$, q.e.d. |

Para verificar que estas demonstrações estão corretas, basta apenas observar que elas são construídas por aplicações sucessivas dos passos lógicos:

$$\frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi} \quad , \quad \frac{\begin{array}{l}\varphi \\ \neg\varphi \vee \psi\end{array}}{\psi} \quad , \quad \frac{\begin{array}{l}\varphi \\ \varphi \rightarrow \psi\end{array}}{\psi} \quad , \quad \frac{\varphi \wedge \psi}{\psi} \quad , \quad \frac{\begin{array}{l}\neg\varphi \rightarrow \neg\psi \\ \psi\end{array}}{\varphi}$$

Mas para considerarmos que o problema original está resolvido, ou seja, que demonstramos que o argumento (4) é válido, também temos que nos convencer que as demonstrações da validade dos argumentos acima realmente garantem a validade de (4).

Observe que no Exemplo 4, queríamos demonstrar $(p \wedge q) \rightarrow (s \wedge t)$ a partir de $\neg p \vee r$, $\neg t \rightarrow \neg q$, $r \rightarrow s$. Mas, na verdade, fizemos duas demonstrações da validade de dois outros argumentos. Uma de $s$ a partir de $p \wedge q$, $\neg p \vee r$, $\neg t \rightarrow \neg q$, $r \rightarrow s$ e outra de $t$, também, a partir de $p \wedge q$, $\neg p \vee r$, $\neg t \rightarrow \neg q$, $r \rightarrow s$. Ou seja, ao invés de demonstramos a validade do argumento dado, nós demonstramos a validade de dois outros argumentos que constrímos a partir do argumento dado, pela análise de sua conclusão, acrescentando hipóteses ao argumento dado e mudando a sua conclusão.

Observe também que os argumentos que nós construímos têm, cada um, uma premissa a mais e uma conclusão mais simples do que o argumento dado.

**Exemplo 4** Consideremos o seguinte argumento:

$$\frac{\begin{array}{l} t \rightarrow \neg q \\ \neg t \rightarrow r \end{array}}{(s \wedge q) \rightarrow (r \vee \neg s)} \tag{6}$$

O argumento 6 é válido ou não?

Vamos responder a esta pergunta positivamente, apresentando uma demonstração da sua validade.

Como fizemos nos Exemplos 2 e 3, primeiramente, examinamos a conclusão do argumento e observamos que ela é uma implicação.

Assim, de acordo com a diretriz que adotamos nos Exemplos 2 e 3 para a demonstração da validade de argumentos cuja conclusão é uma implicação, <u>para mostrar</u> a validade do argumento (6), <u>basta mostrar</u> que o seguinte argumento é válido:

$$\frac{\begin{array}{l} s \wedge q \\ t \rightarrow \neg q \\ \neg t \rightarrow r \end{array}}{r \vee \neg s} \tag{7}$$

Agora, seguimos novamente a diretriz adotada acima e vamos examinar a conclusão do argumento 7. Ao fazer isto, observamos que a conclusão é uma disjunção.

Agora, de acordo com a tabela de avaliação do `ou`, para mostrar que uma disjunção $\varphi \vee \psi$ é $V$, <u>basta mostrar</u> que um dos componentes $\varphi$ ou $\psi$ é $V$.

Assim, para mostrar que um argumento cuja conclusão é uma disjunção é válido, ou seja, para mostrar que uma disjunção $\varphi \vee \psi$ segue das hipóteses $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, basta mostrar que quando assumimos que as hipóteses são $V$, temos garantida a verdade de $\varphi$ ou a verdade de $\psi$.

Assim, para mostrar a validade do argumento (7), basta mostrar que um dois argumentos seguintes é válido:

$$\begin{array}{l} s \wedge q \\ t \to \neg q \\ \neg t \to r \\ \hline r \end{array} \quad , \quad \begin{array}{l} s \wedge q \\ t \to \neg q \\ \neg t \to r \\ \hline \neg s \end{array}$$

Ao examinar isoladamente os dois argumentos acima, não temos nenhuma dificuldade de perceber que o argumento da esquerda é válido e nem de construir uma demonstração direta da validade sua validade. De fato, para o argumento da esquerda, temos:

| | | |
|---|---|---|
| | Suponhamos que: | |
| | 1. | $s \wedge q$ |
| | 2. | $t \to \neg q$ |
| | 3. | $\neg t \to r$ |
| | Daí, temos: | |
| 1 | 5. | $q$ |
| 2, 5 | 6. | $\neg t$ |
| 3, 6 | 8. | $r$, q.e.d. |

Para verificar que esta demonstração está correta, basta apenas observar que ela é construída por aplicações sucessivas dos passos lógicos:

$$\begin{array}{l} \varphi \wedge \psi \\ \hline \psi \end{array} \quad , \quad \begin{array}{l} \varphi \to \neg\psi \\ \psi \\ \hline \neg\varphi \end{array} \quad , \quad \begin{array}{l} \neg\varphi \\ \neg\varphi \to \psi \\ \hline \psi \end{array}$$

Mas para considerarmos que o problema original está resolvido, ou seja, que demonstramos que o argumento (6) é válido, também temos que nos convencer que a demonstração da validade do argumento acima realmente garantem a validade de (6).

Só para completar o raciocínio, observamos que o argumento da direita não é válido. De fato, tomando $q : V$, $r : V$, $s : V$, $t : F$, temos premissas simultaneamente $V$ e conclusão $F$. Assim, este argumento da direita não pode ser usado na demonstração da validade do argumento original.

Observe que no Exemplo 3, queríamos demonstrar $(p \wedge q) \to (s \wedge t)$ a partir de $t \to \neg q$, $\neg t \to r$. Mas, na verdade, fizemos uma demonstração da validade de um outro argumento que nós constrímos a partir do argumento dado, pela análise de sua conclusão, acrescentando hipóteses ao argumento dado e mudando a sua conclusão.

Observe também que o argumento que nós constrímos e demonstramos a validade tem uma premissa a mais e uma conclusão mais simples do que o argumento dado.

## 2.1 Observações

**Observação 2** É muito importante entender, em linhas gerais, o que foi feito acima:

1. Tinhamos um argumento, $A$, que queriamos demonstrar que é váldo.
2. Após examinar $A$, "trocamos" $A$ por um ou mais argumentos.
3. Estes argumentos novos têm mais premissas do que $A$ e conclusões mais simples do que a de $A$.
4. Demonstramos que os (ou, ao menos, alguns dos) argumentos novos obtidos são válidos.
5. Intuitivamente, a validade dos (ou, ao menos, de alguns dos) argumentos novos garantem a validade de $A$.

## 2.2 Exercícios

**Exercício 2** Usando o método esboçado acima, construir demonstrações para a validade dos seguintes argumentos:

(i) $\dfrac{\begin{array}{l} a \to \neg b \\ c \vee b \\ d \to \neg c \end{array}}{d \to \neg a}$ (ii) $\dfrac{\begin{array}{l} a \to b \vee c \\ a \to \neg b \\ c \to \neg d \end{array}}{a \to \neg d}$ (iii) $\dfrac{\begin{array}{l} a \to b \\ \neg a \to (\neg c \vee d) \end{array}}{(c \wedge \neg d) \to (b \wedge c)}$

(iv) $\dfrac{\begin{array}{l} a \to (b \to c) \\ c \to \neg d \\ \neg e \to d \\ a \wedge b \end{array}}{e \vee f}$ (v) $\dfrac{\begin{array}{l} a \to (b \to c) \\ c \to \neg d \\ \neg e \to d \end{array}}{b \to (a \to e)}$ (vi) $\dfrac{\begin{array}{l} (a \to b) \wedge (c \to \neg d) \\ (e \to \neg b) \wedge (\neg f \to d) \\ \neg e \vee f \to g \\ \neg b \to b \\ a \vee c \end{array}}{b \wedge g}$

# 3 Primeiras estratégias de demonstração

Podemos, agora, fazer uma primeira descrição geral do procedimento que usamos na Seção 2 para demonstrar conclusões $\varphi$ a partir de hipóteses $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ (quando não estávamos diante de passos lógicos e optamos por não fazer apenas demonstrações diretas).

Este método pode ser resumido do seguinte modo:

> Para demonstrar $\varphi$ partir de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, basta fazer o seguinte:
>
> 1. Examinar a conclusão $\varphi$.
> 2. De acordo com a classificação de $\varphi$ como implicação, conjunção ou disjunção (e como veremos adiante, também como negação ou bi-implicação), acrescentar enunciados novos às hipóteses já dadas, de modo a obter um ou mais argumentos novos cujas validades garantem a validade do argumento original.
>
>    Este passo deve ser efetuado de maneira que os argumento contruídos a partir do argumento original tenham conclusões mais simples do que as do argumento original.
> 3. Repetir o processo acima até chegar a argumentos cuja validade pode ser justificada facilmente por demonstrações diretas.

**Exemplo 5** (a) No Exemplo 2, aplicamos este procedimento ao argumento:

$$\begin{array}{l} p \to q \\ q \to r \\ r \to s \\ s \to t \\ \hline p \to t \end{array}$$

examinando $p \to t$, e obtivemos o argumento:

$$\begin{array}{l} p \\ p \to q \\ q \to r \\ r \to s \\ s \to t \\ \hline t \end{array}$$

cuja validade, acreditamos, garante a validade do argumento original.

(b) No Exemplo 3, aplicamos este procedimento iteradamente ao argumento:

$$\begin{array}{l} \neg p \lor r \\ \neg t \to \neg q \\ r \to s \\ \hline (p \land q) \to (s \land t) \end{array}$$

examinando primeiro $(p \land q) \to (s \land t)$ e depois $s \land t$, e obtivemos os argumentos:

$$\begin{array}{l} p \land q \\ \neg p \lor r \\ \neg t \to \neg s \\ r \to s \\ \hline s \end{array} \quad , \quad \begin{array}{l} p \land q \\ \neg p \lor r \\ \neg t \to \neg s \\ r \to s \\ \hline t \end{array}$$

cujas validades, acreditamos, garantem a validade do argumento original.

(c) No Exemplo 4, aplicamos este procedimento iteradamente ao argumento:

$$\begin{array}{l} t \to \neg q \\ \neg t \to r \\ \hline (s \wedge q) \to (r \vee \neg s) \end{array}$$

examinando primeiro $(s \wedge q) \to (r \vee \neg s)$ e depois $r \vee \neg s$, e obtivemos os argumentos:

$$\begin{array}{l} s \wedge q \\ t \to \neg q \\ \neg t \to r \\ \hline r \end{array}$$

cuja validade, acreditamos, garante a validade do argumento original.

Em resumo, o que fizemos acima foi examinar a conclusão dos argumentos dados e, através do significado destas conclusões, transformar estes argumentos em outro(s) — com mais premissas e conclusão mais simples — cuja(s) validade(s) garante(m) a validade do argumento original. Em seguida, mostramos que este(s) último(s) argumento(s) é(são) de fato válido(s) e, portanto, acreditamos que o argumento original também é válido.

Podemos, então, dizer que nas demonstrações dos argumentos dos Exemplos 2, 3 e 4, aplicamos tanto passos lógicos, como:

$$\begin{array}{l} \varphi \\ \varphi \to \psi \\ \hline \psi \end{array} \quad , \quad \begin{array}{l} \varphi \wedge \psi \\ \hline \varphi \end{array} \quad , \quad \begin{array}{l} (\neg\varphi) \to (\neg\psi) \\ \psi \\ \hline \varphi \end{array}$$

que afirmam *diretamente* que certos argumentos são válidos, quanto *estratégias de demonstração*, que afirmam *indiretamente* que certos argumentos são válidos. Estas estratégias de demonstração são a transformação do argumento em outro(s) argumento(s) cuja(s) validade(s) garante(m) a validade do argumento original.

Estratégias de demonstração são indiretas na medida em que o problema da validade do argumento original é reduzido ao problema da validade de outros argumentos obtidos a partir do argumento original. Mas isto é feito de maneira que se demonstramos que estes outros argumentos são válidos, acreditamos que o argumento original também é válido, sem apresentar uma prova da sua validade.

Em particular, naqueles exemplos, aplicamos as estratégias a seguir, onde $H$ abrevia as hipóteses do argumento dado originalmente.

**Estratégia do $\to$:**

Para demonstrar que $\dfrac{H}{\varphi \to \psi}$, é válido, basta demonstrar que $\begin{array}{l} H \\ \varphi \\ \hline \psi \end{array}$ é válido.

Em outras palavras, para demonstrar uma implicação, basta supor o antecedente e demonstrar o consequente.

**Exemplo 6** Podemos aplicar a Estratégia do $\rightarrow$ para demonstrar a validade de

$$\begin{array}{l} a \rightarrow b \vee c \\ a \rightarrow \neg b \\ c \rightarrow \neg d \\ \hline a \rightarrow \neg d \end{array}$$

De fato, como a conclusão é a implicação $a \rightarrow \neg d$, podemos acrescentar $a$ como hipótese e tentar provar $\neg d$.

Ou seja, para demonstrar a validade do argumento original, basta demonstrar a validade de:

$$\begin{array}{l} a \\ a \rightarrow b \vee c \\ a \rightarrow \neg b \\ c \rightarrow \neg d \\ \hline \neg d \end{array}$$

Mas isto pode ser feito facilmente por uma demonstração direta:

| | | |
|---|---|---|
| | Suponhamos que: | |
| | 1. | $a$ |
| | 2. | $a \rightarrow b \vee c$ |
| | 3. | $a \rightarrow \neg b$ |
| | 4. | $c \rightarrow \neg d$ |
| | Daí, temos: | |
| 1, 3 | 5. | $\neg b$ |
| 1, 2 | 6. | $b \vee c$ |
| 5, 6 | 7. | $c$ |
| 4, 7 | 8. | $\neg d$, q.e.d. |

**Estratégia do $\wedge$:**

Para demonstrar que $\dfrac{\Sigma}{\varphi \wedge \psi}$ é válido, basta demonstrar que ambos $\dfrac{\Sigma}{\varphi}$ e $\dfrac{\Sigma}{\psi}$ são válidos.

Em outras palavras, para demonstrar uma conjunção, basta demonstrar cada componente.

**Exemplo 7** Após uma aplicação da Estratégia do $\rightarrow$, podemos aplicar a Estratégia do $\wedge$ para demonstrar a validade de

$$\begin{array}{l} a \rightarrow \neg b \\ a \vee \neg b \\ b \\ \hline c \rightarrow b \wedge c \end{array}$$

De fato, como a conclusão é a implicação $c \to b \wedge c$, podemos acrescentar $c$ como hipótese e tentar provar $b \wedge c$. Agora, como $b \wedge c$ é uma conjunção, podemos tentar provar ambos $b$ e $c$ isoladamente.

Ou seja, para demonstrar a validade do argumento original, basta demonstrar a validade dos argumentos:

$$\begin{array}{l} c \\ a \to \neg b \\ a \vee \neg b \\ b \\ \hline b \end{array} \quad , \quad \begin{array}{l} c \\ a \to \neg b \\ a \vee \neg b \\ b \\ \hline c \end{array}$$

Mas isto é inteiramente trivial, uma vez que tanto $b$ quanto $c$ são hipóteses dos argumentos obtidos a partir do argumento original pela aplicaçõos das estratégias.

> **Estratégia do $\vee$:**
>
> Para demonstrar que $\dfrac{\Sigma}{\varphi \vee \psi}$, é válido, basta demonstrar que (ao menos um) dos argumentos $\dfrac{\Sigma}{\varphi}$ ou $\dfrac{\Sigma}{\psi}$ é válido.
>
> Em outras palavras, para demonstrar uma disjunção, basta demonstrar un dos dois componentes.

**Exemplo 8** Podemos aplicar a Estratégia do $\vee$ para demonstrar a validade de

$$\begin{array}{l} (a \wedge e) \wedge f \\ a \to b \vee c \\ b \to \neg a \\ \neg d \to \neg c \\ \hline c \vee d \end{array}$$

De fato, como a conclusão é a disjunção $c \vee d$, podemos tentar provar a validade do argumento original provando a validade de (ao menos) um dos seguintes argumentos:

$$\begin{array}{l} (a \wedge e) \wedge f \\ a \to b \vee c \\ b \to \neg a \\ \neg d \to \neg c \\ \hline c \end{array} \quad , \quad \begin{array}{l} (a \wedge e) \wedge f \\ a \to b \vee c \\ b \to \neg a \\ \neg d \to \neg c \\ \hline d \end{array}$$

Ao examinar estes argumentos um pouco, vemos, claramente, que uma demosntração direta garante que o primeiro argmento é válido:

Suponhamos que:

| | | |
|---|---|---|
| | 1. | $(a \wedge e) \wedge f$ |
| | 2. | $a \rightarrow b \vee c$ |
| | 3. | $b \rightarrow \neg a$ |
| | 4. | $\neg d \rightarrow \neg c$ |
| | | Daí, temos: |
| 1 | 5. | $a$ |
| 3, 5 | 6. | $\neg b$ |
| 2, 5 | 7. | $b \vee c$ |
| 6, 7 | 8. | $c$, q.e.d. |

Só para completar o raciocínio, observamos que o argumento da direita não é válido. De fato, tomando $a : V$, $b : V$, $c : F$, $d : F$, temos premissas simultaneamente $V$ e conclusão $F$. Assim, o argumento da direita não pode ser usado na demonstração da validade do argumento original.

## 3.1 Observações

**Observação 3** A ideia central que queremos salientar é que uma demonstração bem sucedida da validade de argumentos é resultado do inter-relacionamento de duas habilidades: (1) examinar as premissas de modo a formular passos lógicos (2) examinar a conclusão de modo a formular estratégias de demonstração.

Quando ou como aplicar cada uma destas habilidades são decisões que se tornam mais fáceis de serem tomadas com a prática e, consequente, maturidade.

**Observação 4** O método que estamos desenvolvendo é um método para a prova da validade. Observe que ele não diz nada sobre a invalidade de um argumento.

## 3.2 Exercícios

**Exercício 3** Usando o método esboçado acima, construir demonstrações para a validade dos seguintes argumentos:

$$\text{(i)}\quad \frac{\begin{array}{l} a \wedge c \rightarrow d \\ b \wedge c \rightarrow d \\ \neg a \wedge \neg b \rightarrow e \vee f \\ g \rightarrow h \\ c \wedge \neg d \end{array}}{\neg g \vee h}
\qquad
\text{(ii)}\quad \frac{\begin{array}{l} a \wedge b \rightarrow c \\ a \vee e \\ g \rightarrow (\neg c \wedge \neg d) \\ a \leftrightarrow b \\ a \rightarrow c \\ c \rightarrow \neg d \\ b \rightarrow d \end{array}}{\neg a \wedge (g \rightarrow e)}
\qquad
\text{(iii)}\quad \frac{\begin{array}{l} \neg a \rightarrow c \vee d \\ b \rightarrow e \wedge f \\ e \rightarrow d \\ \neg d \end{array}}{(a \rightarrow b) \rightarrow c}$$

(iv) $\dfrac{\begin{array}{l} a \to b \\ c \to \neg b \\ \neg c \to d \\ a \wedge \neg d \end{array}}{e \to f}$ (v) $\dfrac{\begin{array}{l} b \to a \\ \neg a \vee c \\ c \to d \vee e \\ d \to f \wedge \neg b \\ e \to \neg a \wedge f \\ f \to a \\ \neg b \vee g \to i \\ h \to b \end{array}}{h \wedge \neg h}$ (vi) $\dfrac{\begin{array}{l} a \to (b \to c) \\ \neg a \to d \wedge \neg e \\ a \wedge b \to \neg c \\ d \to f \vee g \\ \neg b \to (g \to h) \\ e \vee (h \vee \neg g) \end{array}}{g \to h}$

# 4 Principais estratégias de demonstração

Dado um argumento para o qual queremos apresentar uma demonstração da validade, a elaboração de uma estratégia começa não com uma análise das suas premissas, mas, sim, com uma análise da sua conclusão. É baseados nesta análise que escolhemos que nova premissa acrescentar ou que nova conclusão demonstrar, transformando o argumento original em outro argumento, cuja validade garante a validade do argumento original.

Já vimos algumas estratégias, onde $H$ abrevia as hipóteses do argumento original:

**Estratégia do $\to$:**

Para demonstrar que $\dfrac{H}{\varphi \to \psi}$, é válido, basta demonstrar que $\dfrac{\begin{array}{c} H \\ \varphi \end{array}}{\psi}$ é válido.

Neste caso, olhamos para a conclusão, vimos que ela é uma implicação, $\varphi \to \psi$, e nos convecemos que: (1) podemos acrescentar $\varphi$ como uma nova premissa e (2) a partir daí, basta provarmos $\psi$ como nova conclusão.

**Estratégia do $\wedge$:**

Para demonstrar que $\dfrac{\Sigma}{\varphi \wedge \psi}$ é válido, basta demonstrar que ambos $\dfrac{\Sigma}{\varphi}$ e $\dfrac{\Sigma}{\psi}$ são válidos.

Neste caso, olhamos para a conclusão, vimos que ela é uma conjunção, $\varphi \wedge \psi$, e nos convencemos que: (1) não precisamos acrescentar novas premissa e (2) basta provarmos $\varphi$ e $\psi$ como novas conclusões.

**Estratégia do $\vee$, primeiro componente:**

Para demonstrar que $\dfrac{\Sigma}{\varphi \vee \psi}$, é válido, basta demonstrar que $\dfrac{\Sigma}{\varphi}$ é válido.

Neste caso, olhamos para a conclusão, vimos que ela é uma disjunção, $\varphi \vee \psi$, e nos convecemos que: (1) não precisamos acrescentar novas premissas e (2) basta provarmos $\varphi$ ou $\psi$ como nova conclusão.

As estratégias de demonstração acima ilustram o fato que as estratégias mais conhecidas podem ser apresentadas de acordo com a classificação da conclusão do argumento, como implicação, conjunção, disjunção, bi-implicação, ou negação. Vamos, agora, apresentar, exemplificar e justificar as estratégias mais usadas e que devem fazer parte do repertório de todo estudante de Matemática.

## 4.1 Estratégias para implicações

Quando a conclusão que queremos demonstrar é uma implicação $\varphi \to \psi$, a estratégia mais natural a ser adotada é a Estratégia do $\to$: supor o antecedente $\varphi$ e demonstrar o consequente $\psi$. Mas, a equivalência de $\varphi \to \psi$ com $\neg\psi \to \neg\varphi$, sugere uma outra estratégia cuja aplicação também é muito difundida:

**Estratégia da Contraposição:**

Para demonstrar que $\dfrac{H}{\varphi \to \psi}$, é válido, basta demonstrar que $\dfrac{\begin{array}{l} H \\ \neg\psi \end{array}}{\neg\varphi}$ é válido.

Em outras palavras, para demonstrar uma implicação, basta supor a negação do consequente e demonstrar a negação do antecedente.

O nome desta estratégia vem do fato do enunciado $\neg\psi \to \neg\varphi$ ser, usualmente, chamado *contrapositiva* de $\varphi \to \psi$.

**Exemplo 9** Podemos aplicar a Estratégia da Contraposição para demonstrar a validade de

$$\begin{array}{l} a \to (b \to c) \\ c \to \neg d \\ \neg e \to d \\ \hline b \to (a \to e) \end{array}$$

De fato, como a conclusão é a implicação $b \to (a \to e)$, podemos acrescentar $\neg(a \to e)$ como hipótese e tentar provar $\neg b$. Ou seja, para demonstrar a validade do argumento original, basta demonstrar a validade de:

$$\begin{array}{l} \neg(a \to e) \\ a \to (b \to c) \\ c \to \neg d \\ \neg e \to d \\ \hline \neg b \end{array}$$

Mas isto pode ser feito facilmente por uma demonstração direta:

Suponhamos que:

| | | |
|---|---|---|
| | 1. | $\neg(a \to e)$ |
| | 2. | $a \to (b \to c)$ |
| | 3. | $c \to \neg d$ |
| | 4. | $\neg e \to d$ |
| | Daí, temos: | |
| 1 | 5. | $a \wedge \neg e$ |
| 5 | 6. | $a$ |
| 5 | 7. | $\neg e$ |
| 4, 7 | 8. | $d$ |
| 3, 8 | 9. | $\neg c$ |
| 2, 6 | 10. | $b \to c$ |
| 9, 10 | 11. | $\neg b$, q.e.d. |

Para considerarmos que o problema original está resolvido, ou seja, que demonstramos que o argumento original do Exemplo 9 é válido, temos que nos convencer que a Estratégia da Contraposição realmente pode ser aplicada. Intuitivamente, isto é claro, pois a Estratégia da Contraposição é uma aplicação da estratégia do $\to$ à conclusão $\neg\psi \to \neg\varphi$, que é equivalente à conclusão, $\varphi \to \psi$, do argumento original.

## 4.2 Estratégias para disjunções

Quando a conclusão que queremos demonstrar é uma disjunção $\varphi \vee \psi$, a estratégia mais natural a ser adotada é a Estratégia do $\vee$: demonstrar ao menos um dos dois componentes $\varphi$ ou $\psi$. Mas, como veremos agora, mesmo em casos bastantes simples de validade, esta estratégia nem sempre pode ser aplicada.

**Exemplo 10** Consideremos o seguinte argumento:

$$\begin{array}{l} a \wedge b \\ c \vee d \\ e \to f \\ g \leftrightarrow h \\ \hline i \vee \neg i \end{array} \tag{8}$$

O argumento (8) é válido, ou não?

A resposta a esta pergunta é *sim*. E a justificativa da validade de (8) — que pode parecer um pouco estranha à primeira vista — é inteiramente trivial: (8) é válido por que sua conclusão é uma tautolgia.

De fato, como $i \vee \neg i$ é uma tautologia, $i \vee \neg i$ é $V$ em qualquer interpretação. Assim, não existe uma interpretação na qual as premissas de (8) são simultaneamente $V$ e sua conclusão é $F$ (já que a conclusão nunca pode ser $F$).

Agora, se tentamos aplicar a Estratégia do $\vee$ para demonstrar a validade de (8), reduzimos o problema de demonstrar a validade do argumento original pelo problema de demonstrar a validade de ao menos um dos dois argumentos:

$$\begin{array}{l} a \wedge b \\ c \vee d \\ e \to f \\ g \leftrightarrow h \\ \hline i \end{array} \quad , \quad \begin{array}{l} a \wedge b \\ c \vee d \\ e \to f \\ g \leftrightarrow h \\ \hline \neg i \end{array}$$

Mas, é fácil ver que isto é impossível, já que nenhum dos dois argumentos acima é válido, ou seja, ambos são inválidos. De fato, se tomamos $a : V$, $b : V$, $c : V$, $c : V$, $e : V$, $f : V$, $g : V$ $h : V$, $i : F$, temos que as premissas do argumento do lado esquerdo são simultaneamente $V$ e sua conclusão é $F$. Analogamente, se tomamos $a : V$, $b : V$, $c : V$, $c : V$, $e : V$, $f : V$, $g : V$ $h : V$, $i : V$, temos que as premissas do argumento do lado direito são simultaneamente $V$ e sua conclusão é $F$.

Assim, nenhum dos dois argumento acima é válido e o nosso plano de aplicar a Estratégia do $\vee$ para demonstrar a validade de (8) está essencialmente fadado ao fracasso.

Uma saída para este impasse é observar que a equivalência de $\varphi \vee \psi$ com $\neg\varphi \rightarrow \psi$, sugere uma outra estratégia cuja aplicação também é muito difundida:

**Estratégia da Negação do Primeiro Componente:**

Para demonstrar que $\dfrac{H}{\varphi \vee \psi}$, é válido, basta demonstrar que $\dfrac{\begin{array}{c}H\\ \neg\varphi\end{array}}{\psi}$ é válido.

Em outras palavras, para demonstrar uma disjunção, basta supor a negação do primeiro componente e demonstrar o segundo componente.

**Exemplo 11** (a) Podemos aplicar a Estratégia da Negação do Primeiro Componente para demonstrar a validade do argumento (8), do Exemplo 10, de maneira inteiramente trivial (o que era impossível usando a Estratégia do $\vee$):

De fato, como a conclusão é a disjunção $i \vee \neg i$, podemos acrescentar $\neg i$ como hipótese e tentar provar $\neg i$. Ou seja, para demonstrar a validade do argumento original, basta demonstrar a validade de:

$$\begin{array}{l} \neg i \\ a \wedge b \\ c \vee d \\ e \rightarrow f \\ g \leftrightarrow h \\ \hline \neg i \end{array}$$

Mas isto é completamente trivial, já que a conclusão do argumento é uma das suas premissas. Formalmente — embora na prática nunca façamos isto — é só apresentar uma demonstração direta que repete a premissa que também é a conclusão:

Suponhamos que:
1. $\neg i$
2. $a \wedge b$
3. $c \vee d$
4. $e \rightarrow f$
5. $g \leftrightarrow h$

Daí, temos:

1 5. $\neg i$, q.e.d.

(b) Podemos aplicar a Estratégia da Negação do Primeiro Componente para demonstrar a validade de

$$\begin{array}{l} o \to (v \leftrightarrow g) \\ \neg m \to (v \wedge \neg g) \\ \hline \neg o \vee m \end{array}$$

De fato, como a conclusão é a disjunção $\neg o \vee m$, podemos acrescentar $o$ como hipótese e tentar provar $m$. Ou seja, para demonstrar a validade do argumento original, basta demonstrar a validade de:

$$\begin{array}{l} o \to (v \leftrightarrow g) \\ \neg m \to (v \wedge \neg g) \\ o \\ \hline m \end{array}$$

Mas isto pode ser feito facilmente por uma demonstração direta:

| | | |
|---|---|---|
| | Suponhamos que: | |
| | 1. | $o \to (v \leftrightarrow g)$ |
| | 2. | $\neg m \to (v \wedge \neg g)$ |
| | 3. | $o$ |
| | Daí, temos: | |
| 1, 3 | 4. | $v \leftrightarrow g$ |
| 4 | 5. | $\neg(v \wedge \neg g)$ |
| 2, 5 | 7. | $m$, q.e.d. |

Para considerarmos que os problemas originais estão resolvidos, ou seja, que demonstramos que os argumentos originais dos Exemplos 11(a) e 11(b) são válidos, temos que nos convencer que a Estratégia da Disjunção realmente pode ser aplicada. Intuitivamente, isto é claro, pois a Estratégia da Negação do Primeiro Componente é uma aplicação da estratégia do $\to$ à conclusão $\neg\varphi \to \psi$, que é equivalente à conclusão, $\varphi \vee \psi$, do argumento original.

## 4.3 Estratégias para bi-implicações

Quando a conclusão que queremos demonstrar é uma bi-implicação $\varphi \leftrightarrow \psi$, a estratégia mais natural a ser adotada é a Estratégia do $\leftrightarrow$:

> **Estratégia do $\leftrightarrow$:**
>
> Para demonstrar que $\dfrac{H}{\varphi \leftrightarrow \psi}$ é válido, basta demonstrar que ambos $\dfrac{\begin{array}{c} H \\ \varphi \end{array}}{\psi}$ e $\dfrac{\begin{array}{c} H \\ \psi \end{array}}{\varphi}$ são válidos.
>
> Em outras palavras, para demonstrar uma bi-implicação, basta demonstrar que o primeiro componente acarreta o segundo componente e que o segundo componente também acarreta o primeiro componente.

**Exemplo 12** Podemos aplicar a Estratégia do $\leftrightarrow$ para demonstrar a validade de

$$\begin{array}{l} a \to c \\ \neg c \vee d \\ b \leftrightarrow d \\ b \to \neg(\neg a \wedge d) \\ \hline a \leftrightarrow b \end{array}$$

De fato, como a conclusão é a bi-implicação $a \leftrightarrow b$, podemos, primeiramente, acrescentar $a$ como hipótese e tentar provar $b$ e, posteriormente, acrescentar $b$ como hipótese e tentar provar $a$. Ou seja, para demonstrar a validade do argumento original, basta demonstrar a validade dos seguintes argumentos:

$$\begin{array}{l} a \to c \\ \neg c \vee d \\ b \leftrightarrow d \\ b \to \neg(\neg a \wedge d) \\ a \\ \hline b \end{array} \quad , \quad \begin{array}{l} a \to c \\ \neg c \vee d \\ b \leftrightarrow d \\ b \to \neg(\neg a \wedge d) \\ b \\ \hline a \end{array}$$

Mas isto pode ser feito facilmente por duas demonstrações diretas. De fato, para o primeiro argumento, temos:

| | | |
|---|---|---|
| | Suponhamos que: | |
| | 1. | $a \to c$ |
| | 2. | $\neg c \vee d$ |
| | 3. | $b \leftrightarrow d$ |
| | 4. | $b \to \neg(\neg a \wedge d)$ |
| | 5. | $a$ |
| | Daí, temos: | |
| 1, 5 | 6. | $c$ |
| 2, 6 | 7. | $d$ |
| 3, 7 | 8. | $b$, q.e.d. |

Enquanto que para o segundo, temos:

| | | |
|---|---|---|
| | Suponhamos que: | |
| | 1. | $a \to c$ |
| | 2. | $\neg c \vee d$ |
| | 3. | $b \leftrightarrow d$ |
| | 4. | $b \to \neg(\neg a \wedge d)$ |
| | 5. | $b$ |
| | Daí, temos: | |
| 4, 5 | 6. | $\neg(\neg a \wedge d)$ |
| 6 | 7. | $a \vee \neg d$ |
| 3, 5 | 8. | $d$, |
| 7,8 | 9. | $a$ q.e.d. |

Para considerarmos que o problema original está resolvido, ou seja, que demonstramos que o argumento original do Exemplo 12 é válido, temos que nos convencer que a Estratégia do $\leftrightarrow$ realmente pode ser aplicada. Intuitivamente, isto é claro, pois a Estratégia da Negação do do $\leftrightarrow$ consiste essencialmente de uma aplicação da Estratégia do $\wedge$ em conjunto com duas aplicações da estratégia do $\rightarrow$, sobre o enunciado $(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$, que é equivalente à conclusão, $\varphi \leftrightarrow \psi$, do argumento original.

## 4.4 Estratégias para negações

Quando a conclusão que queremos demonstrar é uma negação, a estratégia usualmente adotada é a Estratégia de Redução ao Absurdo, RA. Esta é uma estratégia bastante sutil e, se utilizada em grandes proporções, pode levar a situações bastante complexas. Por outro lado, RA é razoavelmente simples, quando utilizada com parcimônia, como acontece em certos raciocínios que empregamos no dia-a dia.

**Exemplo 13** (a) Um exemplo típico do uso de Redução ao Absurdo, é o seguinte, onde usamos RA para justificar que não existe um ser onisciente (que sabe tudo), onipotente (que é capaz de fazer tudo) e onibenevolente (que sempre faz o bem quando tem uma oportunidade para isto).

> **Fato:** Não existe um ser onisciente, onipotente e onibenevolente.
>
> **Justificativa:** Suponha que isto não fosse $V$, ou seja, que existisse um ser onisciente, onipotente e onibenevolente. Então, como ele é onisciente, ele sabe que o mal existe. Como ele é onipotente, ele pode exterminar o mal. Como ele é onibenevolente, ele deve exterminar o mal. Mas o mal existe, contradizendo o fato de que na presença de um tal ser, o mal não poderia existir.

Neste caso, temos uma negação, não existe um ser onisciente, onipotente e onibenevolente, que queremos justificar. E fazemos o seguinte:

1. Supomos que o enunciado negado, existe um ser onisciente, onipotente e onibenevolente, é $V$.

2. Raciocinamos a partir desta suposição até concluir um enunciado que contradiz um outro enunciado já admitido como $V$, no caso, o mal existe.

3. Concluímos que a negação da hipótese que fizemos é $V$, ou seja, que não existe um ser onisciente, onipotente e onibenevolente.

(b) Um exemplo matemático típico do uso de Redução ao Absurdo é o seguinte, onde usamos RA para justificar que não se pode dividir um número real $r \neq 0$ por 0.

> **Fato:** $r \div 0$ não é um número real.
>
> **Justificativa:** Suponha que isto não fosse $V$, ou seja, que $r \div 0$ é um número real. Então, existiria um número real $s$ tal que $r \div 0 = s$. Assim, teríamos $r = s \times 0$, ou seja, $r = 0$, contradizendo a hipótese inicial de que $r \neq 0$.

Neste caso, temos uma negação, $r \div 0$ não é um número real, que queremos justificar e fazemos o seguinte:

1. Supomos que o enunciado negado, $r \div 0$ é um número real, é $V$.
2. Raciocinamos a partir desta suposição até concluir um enunciado que contradiz um outro enunciado já admitido como $V$, no caso, $r \neq 0$.
3. Concluímos que a negação da hipótese que fizemos é $V$, ou seja, que $r \div 0$ não é um número real.

Em linhas gerais, a estratégia exemplificada acima tem o seguinte formato:

**Estratégia de Redução ao Absurdo I:**

Para demonstrar que $\dfrac{\Sigma}{\neg\varphi}$ é válido, basta demonstrar que $\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma\\ \varphi\end{array}}{\psi \wedge (\neg\psi)}$, é válido, para algum enunciado $\psi$.

Em outras palavras, para demonstrar uma negação, basta supor a sentença negada e demonstrar uma contradição.

**Exemplo 14** Podemos aplicar a Estratégia de Redução ao Absurdo I para demonstrar a validade de

$$\begin{array}{l} a \vee b \\ c \to \neg a \\ \neg b \vee d \\ d \to \neg c \\ \hline \neg c \end{array}$$

De fato, como a conclusão é a negação $\neg c$, podemos acrescentar $a$ como hipótese e tentar provar uma contradição $\psi \wedge \neg\psi$. Ou seja, para demonstrar a validade do argumento original, basta demonstrar a validade do seguinte argumento:

$$\begin{array}{l} a \vee b \\ c \to \neg a \\ \neg b \vee d \\ d \to \neg c \\ c \\ \hline \psi \wedge \neg\psi \end{array}$$

onde $\psi$ é um enunciado que temos que demonstrar a partir das hipóteses dadas originalmente, juntamente com $c$.

Um pouco de reflexão nos mostra que, tomando $\psi : d$, isto pode ser feito facilmente por uma demonstração direta:

| | | |
|---|---|---|
| | Suponhamos que: | |
| | 1. | $a \vee b$ |
| | 2. | $c \to \neg a$ |
| | 3. | $\neg b \vee d$ |
| | 4. | $d \to \neg c$ |
| | 5. | $c$ |
| | Daí, temos: | |
| 2, 5 | 6. | $\neg a$ |
| 1, 6 | 7. | $b$ |
| 3, 7 | 8. | $d$ |
| 4, 5 | 9. | $\neg d$, q.e.d. |

Como os passos 8 e 9 na demonstração se contradizem, podemos considerar a demonstração por terminada.

Para considerarmos que o problema original está resolvido, ou seja, que demonstramos que o argumento original do Exemplo 14 é válido, temos que nos convencer que a Estratégia de Redução ao Absurdo I realmente pode ser aplicada. Intuitivamente, podemos dizer que a Estratégia de Redução ao Absurdo I consiste essencialmente de duas aplicações da Estratégia do $\to$, baseadas no enunciado $[\neg\varphi \to (\psi \wedge \neg\psi)] \to \varphi$.

## 4.5 Observações

**Observação 5** Como o $\vee$ é comutativo — ou seja, enunciados $\varphi \vee \psi$ e $\psi \vee \varphi$ são equivalentes — quando queremos demonstrar uma disjunção $\varphi \vee \psi$ é sempre possível trocá-la por $\psi \vee \varphi$ e aplicar a Estratégia da Negação do Primeiro Componente. Desta forma, temos também a seguinte estratégia de prova, naturalmente associada ao $\vee$:

**Estratégia da Negação do Segundo Componente:**

Para demonstrar que $\dfrac{H}{\varphi \vee \psi}$, é válido, basta demonstrar que $\dfrac{\begin{matrix} H \\ \neg\psi \end{matrix}}{\varphi}$ é válido.

Em outras palavras, para demonstrar uma disjunção, basta supor a negação do segundo componente e demonstrar o primeiro componente.

**Observação 6** Como todo enunciado $\varphi$ é equivalente a uma negação $\neg\neg\varphi$, podemos estender as aplicações da Estratégia de Redução ao Absurdo a qualquer enunciado, seja ele uma negação ou não:

**Estratégia de redução ao absurdo II:**

Para demonstrar que $\dfrac{\Sigma}{\varphi}$ é válido, basta demonstrar que $\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma\\ \neg\varphi\end{array}}{\psi \wedge (\neg\psi)}$, é válido, para algum enunciado $\psi$.

Em outras palavras, para demonstrar um enunciado qualquer, basta supor a sua negação e demonstrar uma contradição.

Podemos aplicar a Estratégia de Redução ao Absurdo II para demonstrar a validade de

$$\begin{array}{l} a \to (b \to c) \\ c \to \neg d \\ \neg e \leftrightarrow d \\ a \wedge b \\ \hline e \end{array}$$

De fato, como a conclusão é a negação $\neg c$, podemos acrescentar $a$ como hipótese e tentar provar uma contradição $\psi \wedge \neg\psi$. Ou seja, para demonstrar a validade do argumento original, basta demonstrar a validade do seguinte argumento:

$$\begin{array}{l} a \vee b \\ c \to \neg a \\ \neg b \vee d \\ d \to \neg c \\ c \\ \hline \psi \wedge \neg\psi \end{array}$$

onde $\psi$ é um enunciado que temos que demonstrar a partir das hipóteses dadas originalmente, juntamente com $c$.

Um pouco de reflexão nos mostra que, tomando $\psi : d$, isto pode ser feito facilmente por uma demonstração direta:

| | | |
|---|---|---|
| | Suponhamos que: | |
| | 1. | $a \vee b$ |
| | 2. | $c \to \neg a$ |
| | 3. | $\neg b \vee d$ |
| | 4. | $d \to \neg c$ |
| | 5. | $c$ |
| | Daí, temos: | |
| 2, 5 | 6. | $\neg a$ |
| 1, 6 | 7. | $b$ |
| 3, 7 | 8. | $d$ |
| 4, 5 | 9. | $\neg d$, q.e.d. |

Como os passos 8 e 9 na demonstração se contradizem, podemos considerar a demonstração por terminada.

## 4.6 Exercícios

**Exercício 4** Construir demonstrações indiretas para a validade dos seguintes argumentos:

$$\text{(i)}\quad \begin{array}{l} a \to (b \to c) \\ c \to \neg d \\ \neg e \to d \\ \hline b \to (a \to e) \end{array} \qquad \text{(ii)}\quad \begin{array}{l} a \lor b \\ c \to \neg a \\ b \to d \\ c \to \neg d \\ \hline \neg c \end{array} \qquad \text{(iii)}\quad \begin{array}{l} (a \lor b) \lor c \\ a \to (d \leftrightarrow \neg e) \\ b \to \neg(\neg d \lor e) \\ e \to \neg(c \lor d) \\ \neg e \to (c \land d) \\ \hline d \leftrightarrow \neg e \end{array}$$

$$\text{(iv)}\quad \begin{array}{l} (a \to b) \land (c \to \neg d) \\ (e \to \neg b) \land (\neg f \to d) \\ (\neg e \lor f) \to g \\ \neg b \to d \\ a \lor c \\ \hline b \land g \end{array} \qquad \text{(v)}\quad \begin{array}{l} (a \to b) \land (c \to \neg d) \\ (e \to \neg b) \land (\neg f \to d) \\ (\neg e \lor f) \to g \\ \neg b \to d \\ a \lor c \\ \hline b \land g \end{array} \qquad \text{(vi)}\quad \begin{array}{l} (a \land c) \to d \\ (b \land c) \to d \\ (\neg a \land \neg b) \to e \lor f \\ g \to \neg e \\ f \to h \\ c \land \neg d \\ \hline \neg g \lor h \end{array}$$

# 5 Justificando as estratégias

Na Parte 3 do Texto da Semana 7 e na Seção 4 deste texto, apresentamos as principais estratégias de demonstração e justificamos intuitivamente que elas realmente cumprem o papel para o qual foram elaboradas. Nesta seção — cuja leitura pode ser omitida, se você já está convencido que podemos realmente confiar nas estratégias — apresentamos justificativas formais para cada uma das estratégias principais, baseados nas noções de interpretação (de enunciados) e validade (de argumentos).

De uma maneira geral, uma estratégia de demonstração afirma indiretamente que um certo argumento dado, $A$, é válido, ou seja, afirma que a validade de $A$ decorre da validade de certos argumentos $A_1$, $A_2$, ..., $A_n$ obtidos a partir de $A$ pela análise da conclusão de $A$. Assim, para mostrar que uma estratégia é *correta*, devemos mostrar que as validades de $A_1$, $A_2$, ..., $A_n$ realmente acarretam a validade de $A$. Por exemplo, no caso da Estratégia do $\to$, devemos mostrar que a validade de $\begin{array}{c} H \\ \varphi \\ \hline \psi \end{array}$ realmente acarretam a validade de $\begin{array}{c} H \\ \hline \varphi \to \psi \end{array}$.

***A Estratégia do $\to$ é correta.*** De fato, suponhamos que $\begin{array}{c} H \\ \varphi \\ \hline \psi \end{array}$ é válido. Agora, seja $I$ uma interpretação na qual $H : V$, ou seja, na qual todas as hipótese são $V$. Temos dois casos a considerar, dependendo do valor de $\varphi$ em $I$.

Se $\varphi : F$, então $\varphi \to \psi : V$.

Se $\varphi : V$, então $H, \varphi : V$, ou seja, tanto as hipóteses quanto $\varphi$ são $V$. Agora, como $\dfrac{\begin{array}{c}H\\ \varphi\end{array}}{\psi}$ é válido, temos $\psi : V$. Portanto, neste caso, também temos $\varphi \to \psi : V$.

Assim, mostramos que se $\dfrac{\begin{array}{c}H\\ \varphi\end{array}}{\psi}$ é válido, então $\dfrac{H}{\varphi \to \psi}$ também é válido.

***A Estratégia do $\wedge$ é correta.*** De fato, suponhamos que $\dfrac{H}{\varphi}$ e $\dfrac{H}{\psi}$ são válidos. Agora, seja $I$ uma interpretação na qual $H : V$, ou seja, na qual todas as hipótese de ambos os argumentos são $V$.

Como $\dfrac{H}{\varphi}$ e $\dfrac{H}{\psi}$ são válidos, temos $\varphi : V$ e $\psi : V$. Portanto, também temos $\varphi \wedge \psi : V$.

Assim, mostramos que se $\dfrac{H}{\varphi}$ e $\dfrac{H}{\psi}$ são válidos, então $\dfrac{H}{\varphi \wedge \psi}$ também é válido.

***A Estratégia do $\vee$, primeiro componente, é correta.*** De fato, suponhamos que $\dfrac{H}{\varphi}$ é válido. Agora, seja $I$ uma interpretação na qual $H : V$, ou seja, na qual todas as hipótese são $V$.

Como $\dfrac{H}{\varphi}$ é válido, temos $\varphi : V$. Portanto, também temos $\varphi \vee \psi : V$.

Assim, mostramos que se $\dfrac{H}{\varphi}$ é válido, então $\dfrac{H}{\varphi \vee \psi}$ também é válido.

***A Estratégia da Contraposição é correta.*** Vamos redigir formalmente a justificativa já apresentada, baseada na Estratégia do $\to$ e na equivalência de $\varphi \to \psi$ com $\neg\psi \to \neg\varphi$.

Suponhamos que $\dfrac{\begin{array}{c}H\\ \neg\psi\end{array}}{\neg\varphi}$ é válido. Daí, pelo Método do $\to$, temos que $\dfrac{H}{\neg\psi \to \neg\varphi}$ é válido. Agora, como $\varphi \to \psi$ e $\neg\psi \to \neg\varphi$ são equivalentes, temos que $\dfrac{H}{\varphi \to \psi}$ também é válido.

***A Estratégia da Negação do Primeiro Componente é correta.*** Vamos redigir formalmente a justificativa já apresentada, baseada na Estratégia do $\to$ e na equivalência de $\varphi \vee \psi$ com $\neg\varphi \to \psi$.

Suponhamos que $\dfrac{\begin{array}{c}H\\ \neg\varphi\end{array}}{\psi}$ é válido. Daí, pelo Método do $\to$, temos que $\dfrac{H}{\neg\varphi \to \varphi}$ é válido. Agora, como $\varphi \vee \psi$ e $\neg\varphi \to \psi$ são equivalentes, temos que $\dfrac{H}{\varphi \vee \psi}$ também é válido.

***A Estratégia do $\leftrightarrow$ é correta.*** Vamos redigir formalmente a justificativa já apresentada, baseada em equivalências, na Estratégia do $\rightarrow$ e na Estratégia do $\wedge$.

De fato, temos que $\varphi \leftrightarrow \psi$ e $(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$ são equivalentes. Assim, $\dfrac{\begin{matrix} H \\ \varphi \end{matrix}}{\varphi \leftrightarrow \psi}$ é válido se, e somente se, ambos os argumentos $\dfrac{\begin{matrix} H \\ \varphi \end{matrix}}{\varphi \rightarrow \psi}$ e $\dfrac{\begin{matrix} H \\ \varphi \end{matrix}}{\psi \rightarrow \varphi}$ são válidos, se, e somente se, ambos os argumentos $\dfrac{\begin{matrix} \Sigma \\ \varphi \end{matrix}}{\psi}$ e $\dfrac{\begin{matrix} \Sigma \\ \psi \end{matrix}}{\varphi}$ são válidos.

***A Estratégia de Redução ao Absurdo I é correta.*** De fato, suponhamos que $\dfrac{\begin{matrix} H \\ \varphi \end{matrix}}{\psi}$ é válido. Agora, seja $I$ uma interpretação na qual $H : V$. Temos dois casos a considerar, dependendo do valor de $\varphi$ em $I$.

Se $\varphi : F$, então $\varphi \rightarrow \psi : V$.

Se $\varphi : V$, então $H, \varphi : V$ e como $\dfrac{\begin{matrix} H \\ \varphi \end{matrix}}{\psi}$ é válido, temos $\psi : V$. Portanto, neste caso, também temos $\varphi \rightarrow \psi : V$.

Assim, mostramos que se $\dfrac{\begin{matrix} H \\ \varphi \end{matrix}}{\psi}$ é válido, então $\dfrac{H}{\varphi \rightarrow \psi}$ também é válido.

## 5.1 Observação

**Observação 7** Assim como o uso de um argumento inválido como um passo lógico em uma demonstração torna a "demonstração incorreta", o uso de uma estratégias incorreta em uma demonstração também "invalida toda a demonstração".

## 5.2 Exercícios

**Exercício 5** Seguindo os modelos de redação apresentados acima, mostre formalmente que:

(i) A Estratégia da Negação do Segundo Componenteé correta.
(ii) A Estratégia de Redução ao Absurdo II é correta.
(iii) A seguinte Estratégia Pretensa de demonstração associada ao $\wedge$ não é correta.

**Estratégia Pretensa do $\wedge$:**

Para demonstrar que $\dfrac{H}{\varphi \wedge \psi}$ é válido, basta demonstrar que $\dfrac{\begin{matrix} H \\ \varphi \end{matrix}}{\psi}$ é válido.

# 6 Demonstrações indiretas

Como vimos, na Aula 8, um passo lógico afirma que um certo argumento (ou argumentos que possuem a mesma forma) é válido (são válidos). Já uma estratégia de demonstração faz uma afirmação de um outro tipo. Ela não afirma que um certo argumento é válido. Mas, sim, que as validades de certos argumentos $A_1$, $A_2$, $\ldots$, $A_n$ acarretam a validade de outro argumento $A$.

Dois critérios devem sempre guiar a formulação de uma estratégia de prova: (1) elas devem ser *corretas*, ou seja, devemos ter certeza absoluta que as demonstrações das validades de $A_1$, $A_2$, $\ldots$, $A_n$ acarretam a validade de $A$; (2) além disto, para que a estratégia faça sentido, $A_1$, $A_2$, $\ldots$, $A_n$ devem ser mais simples (sob um determinado critério de simplicidade) que $A$.

De maneira geral, podemos dizer que a demonstração da validade de um argumento é construída pela execução dos passos descritos na Figura 1.

Em complementação (mas não em oposição) ao método de demonstração direta apresentado na Aula 8, este tipo de demonstração onde passos lógicos e estratégias de demonstração são aplicados de maneira imbricada é chamado de *demonstração indireta*.

Existem ainda dois detalhes importantes relacionados às estratégias de demonstração que complementam o Método de Demonstração Indireta e que ainda não abordamos. A melhor maneira de chegar até eles é aplicar o método em alguns exemplos mais complicados. Mas isto fica para uma próxima encarnação deste texto.

---

**Método de Demonstração para a Validade:**

Para demonstrar a validade de um argumento, fazemos o seguinte:

**1.1** Analisamos o argumento, para verificar se ele é um passo lógico.

**1.2** Se sim, sua validade é imediata.

Se não, procedemos do seguinte modo:

**2.1** Analisamos as premissas do argumento de modo a determinarmos passos lógicos que nos levem a demonstração da validade.

**2.2** Se somos bem sucedidos em 2.1, então fazemos uma demonstração direta da validade do argumento, baseada em passos lógicos.

Se não, procedemos do seguine modo:

**3.1** Analisamos a conclusão do argumento de modo a determinarmos estratégias que nos levem a demonstração da validade.

**3.2** Se formos bem sucedidos em 3.1, então analisamos o(s) argumento(s) cuja(s) validade(s), consideramos, garante(m) a validade do argumento original.
Para cada argumento analisado, uma de 3 situações podem acontecer: (1) vemos que o argumento é um passos lógico; (2) vemos que o argumento tem uma demonstração direta; (3) achamos que o argumento é mais complicado do que os que ocorrem em (1) e (2).

**3.3** Apresentamos demonstrações diretas da validade do(s) argumento(s) obtido(s) no Passo 3.2(2).

**3.4** Efetuamos a análise novamente, a partir do passo 3.1 para o(s) argumento(s) obtido(s) no Passo 3.2(3).

Figura 1: Descrição geral do Método de Demonstração para a Validade de argumentos.