Lógica dos Conectivos: tautologias e satisfabilidade

Renata de Freitas *e* Petrucio Viana

IME, UFF

18 de junho de 2015

Sumário

- Classificação das fórmulas
- Resultados básicos
- Exercícios

Parte 1

Classificação das fórmulas

Classificação das fórmulas

Toda fórmula $\varphi \in \mathrm{FLC}$ tem uma tabela $T[\varphi]$.

φ pode ser classificada, de acordo com $T[\varphi]$, de várias maneiras.

Por exemplo, podemos classificar φ como *tendo mais probabilidade de ser V do que F*, construindo $T[\varphi]$ e verificando se o número de V's é maior do que o número de F's, na última coluna de $T[\varphi]$.

Classificação clássica

Algumas classificações têm mais importância por terem relações com os problemas mais fundamentais relacionados a fórmulas.

De acordo com a última coluna de $T[\varphi]$, a fórmula φ pode ser classificada em exatamente uma das seguintes categorias:

- V em todas as interpretações,
- V em algumas interpretações e F em outras,
- F em todas as interpretações.

Classificação clássica

Seja $\varphi \in \mathsf{FLC}$.

1. φ é uma tautologia se φ é V em todas as suas interpretações.
2. φ é contingência se φ é V em ao menos uma das suas interpretações e φ é F em ao menos uma das suas interpretações.
3. φ é uma contradição φ é F em todas as suas interpretações.

Exemplos

Para todas as fórmulas φ e ψ da LC:

(i) $\varphi \vee (\neg\varphi)$ é uma tautologia.

(ii) $\varphi \wedge (\neg\varphi)$ é uma contradição.

(iii) Se φ e ψ são tautologias, então $\varphi \models \psi$.

(iv) Se φ e ψ são contradições, então $\varphi \models \psi$.

Classificação contemporânea

Seja $\varphi \in FLC$.

4. φ é satisfazível se existe uma interpretação I para φ tal que $I^*[\varphi] = V$.

5. φ é insatisfazível se φ não é satisfazível.

6. φ é válida, denotado por $\models \varphi$, se, para toda interpretação I para φ, temos que $I^*[\varphi] = V$.

7. φ é inválida se φ não é válida.

Cuidado!!!

Contemporaneamente, usamos os conceitos de veracidade e válidade em duas acepções:

- argumentos são classificados como válidos ou inválidos.

  fórmulas também são classificadas como válidas ou inválidas.

- fórmulas são classificadas como verdadeiras ou falsas (em uma interpretação).

- mas argumentos não são classificados como verdadeiros ou falsos.

Exemplos

Para toda fórmulas φ da LC:

(v) p é satisfazível.

(ii) $\varphi \wedge (\neg\varphi)$ é insatifazível.

(iii) $\varphi \vee (\neg\varphi)$ é válida.

(iv) p é inválida.

Parte 2

Resultados Básicos

Diagramas de classificação

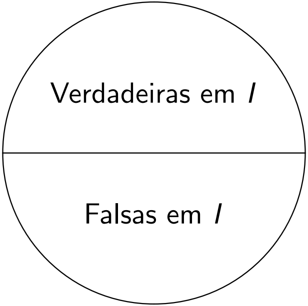
Usando estas definições, podemos visualizar algumas *partições* de FLC.

Lembramos que uma *partição* de um conjunto X é um conjunto $\mathcal{P}$ de subconjuntos de X com as seguintes propriedades:

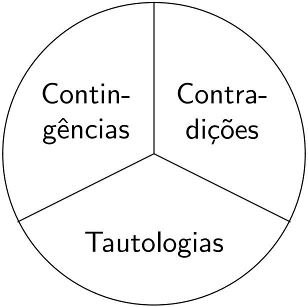
1. Para todo $A \in \mathcal{P}$, temos que $A \neq \emptyset$.
2. Para todos $A, B \in \mathcal{P}$, se $A \neq B$, então $A \cap B = \emptyset$.
3. A união de todos os elementos de $\mathcal{P}$ é igual a X.

Ou seja, $\mathcal{P}$ "quebra" X em "pedaços" não vazios que "exaurem" X.

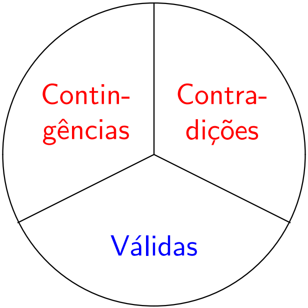
Verdadeiras/Falsas em uma interpretação



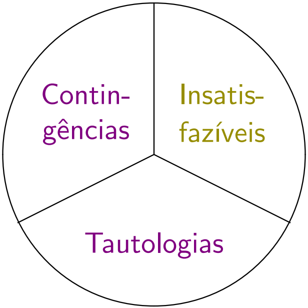
Tautologias/Contingências/Contradições



Válidas/Inválidas



Satisfazíveis/Insatisfazíveis



Os diagramas acima sugerem várias relações entre as classes de fórmulas, que podem ser provadas formalmente, para o nosso deleite.

Toda tautologia é satisfazível.

Teorema Para toda fórmula φ, se φ é uma tautologia, então φ é satisfazível.

PROVA: Seja $\varphi \in FLC$.

Suponhamos que φ é uma tautologia.

Daí, para cada interpretação I, temos $I^*[\varphi] = V$.

Considere a interpretação I tal que $I[s] = V$, para toda $s \in VS$.
Temos que $I^*[\varphi] = V$.

Daí, em ao menos uma interpretação I, temos $I^*[\varphi] = V$.

Logo, φ é satisfazível. ∎

Toda contingência é satisfazível

Teorema Para toda fórmula φ, se φ é uma contingência, então φ é satisfazível.

PROVA. Seja $\varphi \in$ FLC.

Suponhamos que φ é uma contingência.

Daí, φ não é uma tautologia e φ não é uma contradição.

Daí, φ não é uma contradição.

Daí, não é o caso que, para toda interpretação I, temos que $I^*[\varphi] = F$.

Daí, existe uma interpretação I tal que $I^*[\varphi] = V$.

Logo, φ é satisfazível. $\blacksquare$

Parte 3

Exercícios: No pain, no gain!!!

Exercício 1

Verdadeiro ou falso?

(a) Se $\neg\varphi$ é uma tautologia, então φ não é uma tautologia.

(b) Se $\varphi \wedge \psi$ é uma tautologia, então φ e ψ são tautologias.

(c) Se $\varphi \vee \psi$ é uma tautologia, então φ ou ψ são tautologias.

(d) Se $\varphi \to \psi$ é uma tautologia, então (se φ é uma tautologia, então ψ é uma tautologia).

(e) Se $\varphi \leftrightarrow \psi$ é uma tautologia, então (φ é uma tautologia sse ψ é uma tautologia).

Exercício 2

Verdadeiro ou falso?

(a) Se $\neg\varphi$ é uma contingência, então φ não é uma contingência.

(b) Se $\varphi \wedge \psi$ é uma contingência, então φ e ψ são contingências.

(c) Se $\varphi \vee \psi$ é uma contingência, então φ ou ψ são contingências.

(d) Se $\varphi \to \psi$ é uma contingência, então (se φ é uma contingência, então ψ é uma contingência).

(e) Se $\varphi \leftrightarrow \psi$ é uma contingência, então (φ é uma contingência sse ψ é uma contingência).

Exercício 3

Verdadeiro ou falso?

(a) Se $\neg\varphi$ é uma contradição, então φ não é uma contradição.

(b) Se $\varphi \wedge \psi$ é uma contradição, então φ e ψ são contradições.

(c) Se $\varphi \vee \psi$ é uma contradição, então φ ou ψ são contradições.

(d) Se $\varphi \to \psi$ é uma contradição, então (se φ é uma contradição, então ψ é uma contradição).

(e) Se $\varphi \leftrightarrow \psi$ é uma contradição, então (φ é uma contradição sse ψ é uma contradição).