GAN00166: Lógica para Ciência da Computação

Texto da Aula 8

Tautologias e Satisfabilidade em LC

Petrucio Viana
Departamento de Análise, IME–UFF

Sumário

Neste texto, discutimos alguns aspectos referentes aos valores que os enunciados podem assumir, de acordo com as suas interpretações (Seção 1); em particular, abordamos os conceitos de *tautologia*, *contingência* e *contradição* (Seção 2).

Após estudarmos este texto, vamos ser capazes de: classificar um dado enunciado como tautologia, contingência ou contradição (Exercício 1); reconhecer e interpretar algumas tautologias importantes (Exercício 2); aplicar a noção de contradição na resolução de um "problema de linguagem' (Exercício 3).

1 Comportamento de um enunciado

Como vimos na Parte 2 do Texto da Semana 3, para decidir se dois enunciados φ e ψ são equivalentes, basta examinarmos a tabela de avaliação do enunciado $\varphi \leftrightarrow \psi$ e verificarmos se ela possui somente V na sua última coluna. Analogamente, como vimos na Parte 2 do Texto da semana 4, para decidir se um argumento de premissas $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ e conclusão ψ é válido, basta examinarmos a tabela de avaliação do enunciado $(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_n) \to \psi$ e verificar se ela possui somente V na sua última coluna.

A relevância dos problemas da equivalência e da validade — para o raciocínio matemático e para o raciocínio em geral — juntamente com o fato de que um método para resolvê-los se apoia no reconhecimento de enunciados cujas tabelas de avaliação possuem somente V nas suas últimas colunas, são por si só motivos mais do que suficientes para estudarmos este tipo de enunciado.

Mas, além desta motivação técnica, há também uma motivação conceitual para que analisemos enunciados cujas tabelas de avaliação possuem somente V nas suas últimas colunas.

Como vimos, em todos os casos, a determinação do valor de um enunciado atômico depende essencialmente do significado e/ou do contexto no qual ele está inserido. Em uma primeira análise, poderíamos suspeitar que, de maneira similar, em todos os casos, a determinação do valor de um enunciado molecular depende essencialmente do significado e/ou do contexto dos enunciados atômicos que o compõem. Mas, para sermos mais precisos, devemos dizer que:

O valor de um enunciado molecular <u>pode depender ou não</u> do significado e/ou do contexto dos enunciados atômicos que o compõem.

Na verdade, como veremos a seguir, cada uma das seguintes três possibilidades pode acontecer:

(1) Existem enunciados moleculares que são sempre V, *independente do significado e/ou do contexto dos enunciados atômicos que o compõem.* Em outras palavras, existem enunciados moleculares que não são F em nenhum contexto.

(2) Existem enunciados moleculares que são V em certos contextos e F em outros. Em outras palavras, existem enunciados moleculares cujo valor de verdade *depende do significado e/ou do contexto dos enunciados atômicos que o compõem.*

(3) Existem enunciados moleculares que são sempre F, *independente do significado e/ou do contexto dos enunciados atômicos que o compõem.* Em outras palavras, existem enunciados moleculares que não são V em nenhum contexto.

Exemplo 1 Considere os seguintes enunciados:

$$\text{2 é par ou 2 não é par} \tag{1}$$
$$\text{1 é ímpar e 2 é par} \tag{2}$$
$$\text{2 é par e 2 não é par} \tag{3}$$

Dada a legenda

$$p : \text{2 é par}$$
$$q : \text{1 é ímpar}$$

os enunciados (1), (2) e (3), podem ser simbolizados, respectivamente, por:

$$p \vee (\neg p) \tag{4}$$
$$q \wedge p \tag{5}$$
$$p \wedge (\neg p) \tag{6}$$

Vamos agora avaliar os enunciados simbolizados, considerando que cada enunciado atômico pode ser verdadeiro em alguns contextos e falso em outros (mesmo que desconheçamos os contextos no quais os enunciados p e q são F).

(a) O enunciado (4) tem a seguinte tabela, que sumariza o seu "comportamento de verdade":

p	$\neg p$	$p \vee (\neg p)$
V	F	V
F	V	V

Como p é atômico, o valor de p pode ser V em alguns contextos e F em outros. Por isto, a tabela tem duas linhas: uma para cada interpretação de p.

Como (4) é V nas duas interpretações, e estes são os únicos casos possíveis, concluímos que $p \vee (\neg p)$ é verdadeiro em todos os contextos.

(b) O enunciado (5) tem a seguinte tabela, que sumariza o seu "comportamento de verdade":

q	p	$q \wedge p$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Como q e p são atômicos, os valores de q e p podem ser V em alguns contextos e F em outros. Por isto, a tabela tem quatro linhas: uma para cada interpretação de p, q.

Como (5) é V na primeira interpretação e é F na segunda, podemos concluir que o valor de $q \wedge p$ não é independente do contexto no qual ele está inserido, pois ele pode ser tanto V quanto F.

(c) O enunciado (6) tem a seguinte tabela, que sumariza o seu "comportamento de verdade":

p	$\neg p$	$p \wedge (\neg p)$
V	F	F
F	V	F

Como p é atômico, o valor de p pode ser V em alguns contextos e F em outros. Por isto, a tabela tem duas linhas, cada uma correspondendo a uma interpretação de p.

Como (6) é F nas duas interpretações, e estes são os únicos casos possíveis, concluímos que $p \wedge (\neg p)$ é falso em todos os contextos.

1.1 Observação

Observação 1 Em resumo, temos o seguinte:

O valor de verdade de um enunciado atômico sempre varia de acordo com o contexto, ou seja, em alguns contextos ele é V, mas em outros ele é F.

Existem enunciados moleculares cujos valores de verdade variam de acordo com o contexto, ou seja, em alguns contextos eles são V, mas em outros eles são F.

Por outro lado, existem enunciados moleculares cujos valores de verdade não variam de acordo com o contexto, ou seja, ou eles são sempre V ou eles são sempre F.

2 Classificação dos enunciados

Do que foi visto acima, surge o *problema da classificação dos enunciados simbolizados*, isto é, o problema de

dado um enunciado simbolizado, classificá-lo de maneira exclusiva como

(1) verdadeiro em todas as suas interpretações, ou

(2) verdadeiro em algumas das suas interpretações e falso em outras, ou

(3) falso em todas as suas interpretações.

Vamos ver, agora, como esta questão pode ser resolvida pelo uso de tabelas, quando o enunciado é formado por aplicação dos conectivos a enunciados atômicos.

Tautologias

Seja φ um enunciado simbolizado.

Dizemos que φ é uma *tautologia* se φ é V em todas as suas interpretações.

As tautologias são *verdades lógicas*, isto é, enunciados verdadeiros que não podem ser falsificados em nenhum contexto.

Exemplo 2 (a) Já vimos que $p \vee \neg p$ é uma tautologia.

(b) Para decidir se $[p \wedge (p \to q)] \to q$ é uma tautologia, basta construir a tabela de

$$\varphi : [p \wedge (p \to q)] \to q$$

p	q	$p \to q$	$p \wedge (p \to q)$	φ
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

Como na última coluna da tabela de φ só ocorre V, temos que φ é uma tautologia.

Em outras palavras, um enunciado simbolizado é uma tautologia se, e somente se, na última coluna de sua tabela de avaliação, ocorre somente V.

Contingências

> Seja φ um enunciado simbolizado.
>
> Dizemos que φ é uma *contingência* se φ é V em ao menos uma de suas interpretações e F em ao menos uma outra.

Exemplo 3 (a) Já vimos que $q \wedge p$ é uma contingência.

(b) Para decidir se $[q \wedge (p \to q)] \to p$ é uma contingência, basta construir a tabela de

$$\varphi : [q \wedge (p \to q)] \to p$$

p	q	$p \to q$	$q \wedge (p \to q)$	φ
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	V	F
F	F	V	F	V

Como na última coluna da tabela de φ ocorre tanto V quanto F, temos que φ é uma contingência.

Em outras palavras, um enunciado simbolizado é uma contingência se, e somente se, na última coluna de sua tabela ocorre tanto V quanto F.

Contradições

Seja φ um enunciado simbolizado.

Dizemos que φ é uma *contradição* se φ é F em todas as suas interpretações.

As contradições são *as falsidades lógicas*, isto é, enunciados falsos que não podem ser verdadeiros em nenhum contexto.

Exemplo 4 (a) Já vimos que $p \wedge \neg p$ é uma contradição.

(b) Para decidir se $(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$ é uma contradição, basta construir a tabela de avaliação de

$$\varphi : (p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$$

p	q	$p \wedge q$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$	φ
V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	F	V	V	F
F	V	F	V	F	V	F
F	F	F	V	V	V	F

Como na última coluna da tabela de avaliação de φ só ocorre F, temos que φ é uma contradição.

Em outras palavras, um enunciado simbolizado é uma contradição se, e somente se, na última coluna de sua tabela ocorre somente F.

2.1 Observações

Observação 2 Em resumo, temos o seguinte:

(1) Qualquer enunciado (formado exclusivamente por aplicação dos conectivos às proposições atômicas) pode ser simbolizado.

(2) Cada enunciado simbolizado possui uma tabela de avaliação.

(3) A tabela de avaliação do enunciado simbolizado pode ser usada para classificar o enunciado simbolizado e, consequentemente, o enunciado original, como tautologia, contingência ou contradição.

Observação 3 Usando a noção de tautologia, a essência do Método das Tabelas para Equivalência pode ser descrita do seguinte modo:

Verificar se os enunciados φ e ψ são <u>equivalentes</u>

é o mesmo que verificar se

o enunciadoo $\varphi \leftrightarrow \psi$ é uma <u>tautologia</u>.

Analogamente, a essência do Método das Tabelas para Validade pode ser descrita do seguinte modo:

$$\text{Verificar se o argumento } \frac{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n}{\varphi} \text{ é } \underline{\text{válido}}$$

é o mesmo que verificar se

a implicação associada $(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_n) \rightarrow \varphi$ é uma tautologia.

Devido ao papel que desempenham na verificação da equivalência de enunciados e na validade de argumentos, as tautologias e as contradições têm um papel crucial em vários aspectos do raciocínio, tanto em matemática quanto no dia-a-dia.

2.2 Exercícios

Exercício 1 Classificar cada enunciado abaixo como tautologia, contingência ou contradição.

(i) $p \leftrightarrow (p \wedge p)$
(ii) $(\neg p) \rightarrow (p \vee q)$
(iii) $[(\neg p) \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow \neg q$
(iv) $[\neg(p \rightarrow q)] \wedge [(\neg p) \vee q]$
(v) $(p \rightarrow q) \rightarrow [(q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)]$

Exercício 2 A seguir, temos uma lista com algumas "tautologias famosas". Além de verificar que cada uma delas é uma tautologia, devemos também nos familiarizar com os seus conteúdos. Algumas destas tautologias revelam facetas pitorescas e desconcertantes do tipo de raciocínio empregado em Matemática.

Mostre que cada enunciado abaixo é uma tautologia.

Tautologia	Nome da tautologia
$[\varphi \wedge (\varphi \rightarrow \psi)] \rightarrow \psi$	*Modus Ponens*
$[(\varphi \rightarrow \psi) \wedge \neg\psi] \rightarrow \neg\varphi$	*Modus Tolens*
$(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow [(\neg\psi) \rightarrow (\neg\varphi)]$	Contrapositiva
$[\varphi \rightarrow (\psi \wedge \neg\psi)] \rightarrow \neg\varphi$	Redução ao Absurdo
$\psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$	Afirmação do Consequente
$(\neg\varphi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$	Negação do Antecedente
$(\varphi \wedge \neg\varphi) \rightarrow \psi$	Lei da Contradição
$\varphi \rightarrow (\psi \vee \neg\psi)$	Lei da Tautologia

Modus Ponens garante que se temos uma implicação e seu antecedente, podemos concluir seu consequente. *Modus Tolens* garante que se temos uma implicação e a negação do seu consequente, podemos concluir a negação do seu antecedente. *Contrapositiva* garante que se temos uma implicação, também temos que a negação do seu consequente acarreta a negação do seu antecedente. *Redução ao Absurdo* garante que se um enunciado acarreta uma contradição, então podemos concluir a sua negação. *Afirmação do Consequente* garante que se temos um enunciado, ele decorre de qualquer outro. *Negação do Antecedente* garante que se temos a negação de um enunciado, o enunciado negado acarreta qualquer outro. *Lei da Contradição* garante que de uma contradição, podemos concluir qualquer enunciado. *Lei da Tautologia* garante que uma tautologia é consequência de qualquer enunciado.

Exercício 3 Dizemos que dois enunciados φ e ψ *estão em contradição* quando a conjunção $\varphi \wedge \psi$ é uma contradição. Qual das frases abaixo não está em contradição com a frase

Lógica é uma matéria linda. ?

(i) Lógica não é uma matéria.
(ii) Lógica é uma matéria feia.
(iii) Lógica não é linda.

Antes de ler a resolução, tente resolver o exercício usando os conceitos estudados.

Resolução do Exercício 1: (i) Tabela de $\varphi : p \leftrightarrow (p \wedge p)$:

p	$p \wedge p$	φ
V	V	V
F	F	V.

Tautologia, pois φ é V em todas as interpretações. (ii) Tabela de $\varphi : (\neg p) \to (p \vee q)$:

p	q	$\neg p$	$p \vee q$	φ
V	V	F	V	V
V	F	F	V	V
F	V	V	V	V
F	F	V	F	F.

Contingência, pois φ é V na interpretação $p : V$ e $q : V$; e φ é F na interpretação $p : F$ e $q : F$. (iii) Tabela de $\varphi : [(\neg p) \wedge (p \to q)] \to \neg q$:

p	q	$\neg p$	$p \to q$	$\neg p \wedge (p \to q)$	$\neg q$	φ
V	V	F	V	F	F	V
V	F	F	F	F	V	V
F	V	V	V	V	F	F
F	F	V	V	V	V	V.

Contingência, pois φ é V na interpretação $p : V$ e $q : V$; e φ é F na interpretação $p : F$ e $q : V$. (iv) Tabela de $\varphi : (\neg(p \to q)) \wedge ((\neg p) \vee q)$:

p	q	$p \to q$	$\neg(p \to q)$	$\neg p$	$(\neg p) \vee q$	φ
V	V	V	F	F	V	F
V	F	F	V	F	F	F
F	V	V	F	V	V	F
F	F	V	F	V	V	F.

Contradição, pois φ é F em todas as interpretações. (v) Tautologia. Tabela de $\varphi : (p \to q) \to [(q \to r) \to (p \to r)]$:

p	q	r	$p \to q$	$q \to r$	$p \to r$	$(q \to r) \to (p \to r)$	φ
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V.

Tautologia, pois φ é V em todas as interpretações. ***Sobre o Exercício 2:*** Como está dito, todos os enunciados são tautologias. Podemos confirmar isto construindo a tabela de avaliação de cada enunciado, ou através dos seguintes <u>raciocínios baseados nas tabelas dos conectivos</u>: (a) Modus Ponens é tautologia, pois não pode ser F. De fato, se tivéssemos $[\varphi \wedge (\varphi \to \psi)] \to \psi : F$, teríamos $\varphi \wedge (\varphi \to \psi) : V$ e $\psi : F$. Mas, $\varphi \wedge (\varphi \to \psi) : V$ acarretaria $\varphi : V$ e $\varphi \to \psi : V$. Agora, $\varphi : V$ e $\psi : F$ acarretariam $\varphi \to \psi : F$, o que iria contra $\varphi \to \psi : V$. (b) Modus Tolens é tautologia, pois não pode ser F. De fato, se tivéssemos $[(\varphi \to \psi) \wedge \neg\psi] \to \neg\varphi : F$, teríamos $(\varphi \to \psi) \wedge \neg\psi : V$ e $\neg\varphi : F$. Assim, teríamos $\varphi \to \psi : V$, $\neg\psi : V$ e $\neg\varphi : F$. Daí, teríamos $\psi : F$ e $\varphi : V$, o que acarretaria $\varphi \to \psi : F$, o que iria contra $\varphi \to \psi : V$. (c) Contrapositiva é tautologia, pois não pode ser F. De fato, se tivéssemos $(\varphi \to \psi) \to [(\neg\psi) \to (\neg\varphi)] : F$, teríamos $\varphi \to \psi : V$ e $\neg\psi \to \neg\varphi : F$. Assim, teríamos $\neg\psi : V$ e $\neg\varphi : F$, o que acarretaria $\psi : F$ e $\varphi : V$. Daí, teríamos $\varphi \to \psi : F$, o que iria contra $\varphi \to \psi : V$. (d) Redução ao Absurdo é tautologia, pois não pode ser F. De fato, se tivéssemos $[\varphi \to (\psi \wedge \neg\psi)] \to \neg\varphi : F$, teríamos $\varphi \to (\psi \wedge \neg\psi) : V$ e $\neg\varphi : F$. Assim, teríamos $\varphi : V$ e $\varphi \to (\psi \wedge \neg\psi) : V$. Com isto, teríamos $\psi \wedge \neg\psi : V$, o que iria contra a tabela de $\psi \wedge \neg\psi$:

ψ	$\neg\psi$	$\psi \wedge \neg\psi$
V	F	F
F	V	F.

(e) Afirmação do Consequente é tautologia, pois não pode ser F. De fato, se tivéssemos $\psi \to (\varphi \to \psi) : F$, teríamos $\psi : V$ e $\varphi \to \psi : F$. Assim, teríamos $\varphi : V$ e $\psi : F$. Mas, $\psi : F$ iria contra $\psi : V$. (f) Negação do Antecedente é tautologia, pois não pode ser F. De fato, se tivéssemos $(\neg\varphi) \to (\varphi \to \psi) : F$, teríamos $\neg\varphi : V$ e $\varphi \to \psi : F$. Assim, teríamos $\varphi : V$ e $\psi : F$. Mas, $\varphi : V$ iria contra $\neg\varphi : V$. (g) Lei da Contradição é tautologia, pois não pode ser F. De fato, se tivéssemos $(\varphi \wedge \neg\varphi) \to \psi : F$, teríamos $\varphi \wedge \neg\varphi : V$ e $\psi : F$. Mas, $\varphi \wedge \neg\varphi : V$ iria contra a tabela de $\psi \wedge \neg\psi$:

ψ	$\neg\psi$	$\psi \wedge \neg\psi$
V	F	F
F	V	F.

(h) Lei da Tautologia é tautologia, pois não pode ser F. De fato, se tivéssemos $\varphi \to (\psi \vee \neg\psi) : F$, teríamos $\varphi : V$ e $\psi \vee \neg\psi : F$. Mas, $\psi \vee \neg\psi : F$ iria contra a tabela de $\psi \vee \neg\psi$:

ψ	$\neg\psi$	$\psi \vee \neg\psi$
V	F	V
F	V	V.

Resolução do Exercício 3: Considere os enunciados: (1) Lógica é uma matéria linda, (2) Lógica não é uma matéria, (3) Lógica é uma matéria feia e (4) Lógica não é linda. *Reescrita dos enunciados*: (1) Lógica é uma matéria e Lógica é linda, (2) não (Lógica é uma matéria), (3) Lógica é uma matéria feia e (4) não (Lógica é linda). *Legenda*:

m	:	Lógica é uma matéria
l	:	Lógica é linda
f	:	Lógica é feia.

Simbolizações: (1) $m \wedge l$, (2) $\neg m$, (3) $m \wedge f$, (4) $\neg l$. *Tabela conjunta*:

m	l	f	(1)	(2)	(3)	(4)	(1) $\wedge$ (2)	(1) $\wedge$ (3)	(1) $\wedge$ (4)
V	V	V	V	F	V	F	F	V	F
V	V	F	V	F	F	F	F	F	F
V	F	V	F	F	V	V	F	F	F
V	F	F	F	F	F	V	F	F	F
F	V	V	F	V	F	F	F	F	F
F	V	F	F	V	F	F	F	F	F
F	F	V	F	V	F	V	F	F	F
F	F	F	F	V	F	V	F	F	F.

De acordo com a tabela, (1) $\wedge$ (2) e (1) $\wedge$ (4) são contradições, enquanto que (1) $\wedge$ (3) não é, pois é V quando $m : V$, $l : V$ e $f : V$. Assim, a frase que não está com contradição com (1) é (3).