Lógica dos Quantificadores: sintaxe e semântica intuitiva quantificação em domínios infinitos

Renata de Freitas *e* Petrucio Viana

IME, UFF

28 de maio de 2015

Sumário

- Quantificadores sobre domínios infinitos.
- A noção de variável.
- Análise de sentenças atômicas.
- Análise de sentenças moleculares.
- Exercícios.

Parte 1

Quantificadores sobre domínios infinitos

Quantificação em domínios infinitos

Se trabalhássemos somente com domínios finitos, poderíamos abolir o uso dos quantificadores e ficar somente com os conectivos, escrevendo conjunções e disjunções generalizadas no lugar de sentenças onde ocorrem o todo e o existe.

Mas, em Computação, Engenharia, Matemática, etc., mesmo nos estudos mais elementares, domínios infinitos também são considerados.

Por isso precisamos estudar a formação e avaliação de sentenças por meio dos quantificadores.

Exemplo 1

Considere como domínio o conjunto dos números naturais:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$$

Neste contexto, afirmamos:

todos os elementos de $\mathbb{N}$ *são positivos*

Esta sentença é V ou F?

Exemplo 1

Como temos:

$$\begin{array}{lcl} 0 \text{ é positivo} & : & F \\ 1 \text{ é positivo} & : & V \\ 2 \text{ é positivo} & : & V \\ \vdots & & \\ n \text{ é positivo} & : & V \\ \vdots & & \end{array}$$

concluímos que a sentença é F.

Exemplo 1

A sentença

$$\textit{todos os elementos de } \mathbb{N} \textit{ são positivos}$$

é F,

da mesma forma como

$$[0 \textit{ é positivo}] \wedge \cdots \wedge [n \textit{ é positivo}] \wedge \cdots$$

seria F, se pudesse ser escrita.

Exemplo 2

Considere como domínio o conjunto dos números naturais:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$$

Neste contexto, afirmamos:

todos os elementos de $\mathbb{N}$ *são inteiros*

Esta sentença é V ou F?

Exemplo 2

Como temos:

$$\begin{array}{lcl} 0 \text{ \emph{é inteiro}} & : & V \\ 1 \text{ \emph{é inteiro}} & : & V \\ 2 \text{ \emph{é inteiro}} & : & V \\ \vdots & & \\ n \text{ \emph{é inteiro}} & : & V \\ \vdots & & \end{array}$$

concluímos que a sentença é V.

Exemplo 2

A sentença

$$\textit{todos os elementos de } \mathbb{N} \textit{ são inteiros}$$

é V,

da mesma forma como

$$[0 \textit{ é inteiro}] \wedge \cdots \wedge [n \textit{ é inteiro}] \wedge \cdots$$

seria V, se pudesse ser escrita.

Em domínios infinitos, o todo é equivalente, em termos de conteúdo, a uma "conjunção infinita", embora uma tal conjunção não possa ser escrita.

Exemplo 3

Considere como domínio o conjunto dos números naturais:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$$

Neste contexto, afirmamos:

existe um elemento de $\mathbb{N}$ *que é perfeito*

Esta sentença é V ou F?

Um número natural é perfeito se é igual à soma dos seus divisores próprios.

Exemplo 3

Como temos:

$$\begin{array}{lcl} 0 \text{ é } perfeito & : & F \\ 1 \text{ é } perfeito & : & F \\ 2 \text{ é } perfeito & : & F \\ 3 \text{ é } perfeito & : & F \\ 4 \text{ é } perfeito & : & F \\ 5 \text{ é } perfeito & : & F \\ 6 \text{ é } perfeito & : & V \\ \vdots & & \end{array}$$

concluímos que a sentença é V.

Exemplo 3

A sentença

$$\textit{existe um elemento de } \mathbb{N} \textit{ que é perfeito}$$

é V,

da mesma forma como

$$[0 \textit{ é perfeito}] \vee \cdots \vee [n \textit{ é perfeito}] \vee \cdots$$

seria V, se pudesse ser escrita.

Exemplo 4

Considere como domínio o conjunto dos números naturais:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$$

Neste contexto, afirmamos:

existe um elemento de $\mathbb{N}$ *que é irracional*

Esta sentença é V ou F?

Exemplo 4

Como temos:

$$\begin{array}{lcl} 0 \text{ é irracional} & : & F \\ 1 \text{ é irracional} & : & F \\ 2 \text{ é irracional} & : & F \\ \vdots & & \\ n \text{ é irracional} & : & F \\ \vdots & & \end{array}$$

concluímos que a sentença é F.

Exemplo 4

A sentença

$$\textit{existe um elemento de } \mathbb{N} \textit{ que irracional}$$

é F,

da mesma forma como

$$[0 \textit{ é irracional}] \vee \cdots \vee [n \textit{ é irracional}] \vee \cdots$$

seria F, se pudesse ser escrita.

Em domínios infinitos, o existe (ao menos um) é equivalente, em termos de conteúdo, a uma "disjunção infinita", embora uma tal disjunção não possa ser escrita.

Em resumo

1. Em termos de conteúdo, o todo é equivalente a um $\wedge$ generalizado e o existe é equivalente a um $\vee$ generalizado.

2. Mas, em termos de reescrita, não existe uma associação direta entre os conectivos $\wedge$ e $\vee$ e os quantificadores todo e existe.

Nos casos dos domínios infinitos, não poderíamos escrever, de maneira direta, todo como um $\wedge$ nem existe como um $\vee$.

Parte 2

A noção de variável

A noção de variável

Surge, então, o problema de escrever conjunções e disjunções possivelmente infinitas, como as acima, usando apenas uma quantidade finita de letras.

Um primeiro passo para resolver este problema é considerar se há uma “forma comum” para os componentes das conjunções ou disjunções em questão.

A noção de variável

todos os elementos de $\mathbb{N}$ *são positivos*

$$[0 \text{ \emph{é positivo}}] \wedge \cdots \wedge [n \text{ \emph{é positivo}}] \wedge \cdots$$

A forma comum é:

$$x \text{ \emph{é positivo}}$$

onde x pode ser visto como um "pronome" que pode ser usado para denotar qualquer um dos elementos do conjunto dos números naturais.

A noção de variável

$$\textit{existem elementos de } \mathbb{N} \textit{ que são pares}$$

$$[0 \textit{ é par}] \vee \cdots \vee [n \textit{ é par}] \vee \cdots$$

A forma comum é:

$$y \textit{ é par}$$

onde y pode ser visto como um "pronome" que pode ser usado para denotar qualquer um dos elementos do conjunto dos números naturais.

A noção de variável

O segundo passo é usar esta "forma comum" para expressar se queremos afirmar a propriedade para todos ou para ao menos um dos elementos.

Se queremos afirmar para todos os naturais, colocamos uma 'marca' previamente convencionada deixando claro que a afirmação é feita para todos os elementos do domínio:

$$\textit{para todo } x : x \textit{ é positivo}$$

Se queremos afirmar para ao menos um natural, vamos colocar uma outra 'marca' previamente convencionada deixando claro que a afirmação é feita para ao menos um dos elementos do domínio:

$$\textit{existe } y : y \textit{ é par}$$

A noção de variável

As letras

$$x \quad , \quad y$$

usadas acima são chamadas de variáveis e as 'marcas'

$$\text{para todo } x \quad , \quad \text{existe } y$$

são chamadas de quantificadores aplicados a variáveis.

Chegamos, então, à noção de 'frases que possuem ocorrências de variáveis e/ou quantificadores aplicados a estas variáveis'.

A noção de variável

A formalização das noções de

- variável e
- quantificador aplicado a uma variável

leva a vários detalhes sutis que devem ser considerados, quando elaboramos as definições referentes à sintaxe e à semântica de fórmulas que terão ocorrências de variáveis e quantificadores.

Antes das definições, vamos examinar alguns exemplos.

Parte 3

Análise de sentenças atômicas

Análise de sentenças atômicas

Na análise de sentenças atômicas, procuramos identificar:

- nomes de objetos (ou pronomes), e
- Propriedades de objetos ou
- Relações entre objetos

que foram utilizados na formação da sentença.

Exemplo 5

Ricardo é professor

Nome : *Ricardo*
Propriedade : *ser professor*

O nome denota um objeto determinado.
A propriedade é atribuída a um objeto.

Legenda:

a	:	*Ricardo*
P	:	— *é professor*

Simbolização:

$$P(a)$$

Exemplo 6

Ele é cineasta

Pronome : *Ele*
Propriedade : *ser cineasta*

O pronome denota um objeto indeterminado.
A propriedade é atribuída a um objeto.

Legenda:

$$\text{Q} \quad : \quad \text{— } \textit{é cineasta}$$

Simbolização:

$$Q(x)$$

Exemplo 7

Ele é amigo de Ricardo

Pronome : *Ele*
Propriedade : *ser amigo de Ricardo*

Legenda:

R : — *é amigo de Ricardo*

Simbolização:

$$R(x)$$

Exemplo 7 alternativo

Ele é amigo de Ricardo

Pronome : *Ele*
Nome : *Ricardo*
Relação : *ser amigo de*

A relação é atribuída a dois objetos.

Legenda:

a	:	*Ricardo*
S	:	— *é amigo de* —

Simbolização:

$$S(x, a)$$

Exemplo 8

Jorge está entre João e Ricardo

Nome 1: *Jorge*
Nome 2: *João*
Nome 3: *Ricardo*
Relação : *estar entre dois objetos*

A relação é atribuída a três objetos.

Legenda:

a	:	*Jorge*
b	:	*João*
c	:	*Ricardo*
T	:	— *está entre* — *e* —

Simbolização:

$$T(a, b, c)$$

Exemplo 9

Jorge é amigo de João e de Ricardo

Nome : *Jorge*
Propriedade 1 : *ser amigo de João*
Propriedade 2 : *ser amigo de Ricardo*

Legenda:

a	:	*Jorge*
P	:	— *é amigo de João*
Q	:	— *é amigo de Ricardo*

Simbolização:

$$P(a) \wedge Q(a)$$

Exemplo 9 alternativo

Jorge é amigo de João e de Ricardo

Nome 1: *Jorge*
Nome 2: *João*
Nome 3: *Ricardo*
Relação : *ser amigo de*

Legenda:

a	:	*Jorge*
b	:	*João*
c	:	*Ricardo*
R	:	— *é amigo de* —

Simbolização:

$$R(a, b) \wedge R(a, c)$$

Em resumo

Nas suas formas mais simples, as sentenças atômicas são de dois tipos:

- Propriedade atribuída a um objeto;
- Relação atribuída a mais de um objeto.

Nas suas formas mais simples, os objetos são denotados de duas maneiras:

- Por uma constante : 'nome' de um objeto determinado no contexto;
- Por uma variável : 'pronome' que se refere a um objeto indeterminado no contexto.

Em resumo

Os símbolos reservados para constantes são:

$$a, b, c, \ldots$$

os símbolos reservados para variáveis são:

$$x, y, z, \ldots$$

os símbolos reservados para propriedades e relações são:

$$P, Q, R, \ldots$$

todos podem ser indexados, se for preciso.

Parte 4

Exercícios

Exercício 1

Simbolizar as seguintes sentenças de enredo de Novela das 9:

(i) *Célia ama Ricardo*

(ii) *Ricardo não ama Célia*

(iii) *Célia e Ricardo são amigos*

(iv) *Célia e João são namorados*

(v) *Célia ama Ricardo mas namora com João*

(vi) *João viu Célia com Ricardo e brigou com ela*

(vii) *João proibiu Célia de encontrar Ricardo*

(viii) *Ricardo descobriu que ama Célia e contou a verdade para ela*

(ix) *Célia não acha mais Ricardo interessante*

(x) *Célia largou João e Ricardo e foi morar com o mordomo em Miami*

Parte 5

Análise de sentenças moleculares

Exemplo 10

todos são mortais

Propriedade: *ser mortal*

Atribuída a todos os objetos.

Legenda:

P : — *é mortal*

Simbolização:

$$\forall x(P(x))$$

Exemplo 11

alguém é eterno

Propriedade: *ser eterno*

Atribuída a (ao menos) um objeto.

Legenda:

Q : — *é eterno*

Simbolização:

$$\exists x(Q(x))$$

Exemplo 12

nem todos são mortais

Negação de

todos são mortais

Legenda:

P : — *é mortal*

Simbolização:

$$\neg(\forall x(P(x)))$$

Exemplo 12 alternativo

nem todos são mortais

O mesmo que dizer

existe (ao menos) um que não é mortal

Legenda:

P : — *é mortal*

Simbolização:

$$\exists x(\neg P(x))$$

Exemplo 13

ninguém é eterno

O mesmo que dizer

não existe (ao menos) um que é eterno

Legenda:

Q : — *é eterno*

Simbolização:

$$\neg(\exists x(Q(x)))$$

Exemplo 13 alternativo

ninguém é eterno

O mesmo que dizer

todos não são eternos

Legenda:

Q : — *é eterno*

Simbolização:

$$\forall x(\neg Q(x)))$$

Exemplo 14

todos são falíveis e mortais

Propriedade 1: *ser falível*
Propriedade 2: *ser mortal*

Atribuídas em conjunto a todos os objetos.

Legenda:

R	:	— *é falível*
S	:	— *é mortal*

Simbolização:

$$\forall x(R(x) \wedge S(x))$$

Exemplo 15

existem pobres que são saudáveis

Propriedade 1: *ser pobre*
Propriedade 2: *ser saudável*

Atribuídas em conjunto a (ao menos) um objeto.

Legenda:

T : — *é pobre*
U : — *é saudável*

Simbolização:

$$\exists x(T(x) \wedge U(x))$$

Exemplo 16

todos os homens são mortais

Propriedade 1: *ser homem*
Propriedade 2: *ser mortal*

Afirma que o conjunto dos homens está contido no conjunto dos mortais.

Legenda:

$$\begin{array}{lcl} \mathrm{H} & : & \text{— } \textit{é homem} \\ \mathrm{M} & : & \text{— } \textit{é mortal} \end{array}$$

Simbolização:

$$\forall x(H(x) \rightarrow M(x))$$

Exemplo 17

existem aqueles cujo heroísmo decorre da covardia

Propriedade 1: *ser covarde*
Propriedade 2: *ser herói*

Legenda:

C	:	— *é covarde*
H	:	— *é herói*

Simbolização:

$$\exists x(C(x) \to H(x))$$

Em resumo

As sentenças moleculares são formadas a partir de sentenças atômicas, por aplicação de conectivos e quantificadores associados a variáveis.

As sentenças atômicas são simbolizadas em uma das formas

$$P(t) \quad , \quad R(t_1, t_2, \ldots, t_n)$$

onde P simboliza uma propriedade, R simboliza uma relação e $t, t_1, t_2, \ldots, t_n$ são constantes ou variáveis.

Os quantificadores associados às variáveis são

$$\forall x \quad , \quad \exists x \quad , \quad \forall y \quad , \quad \exists y \quad , \quad \forall z \quad , \quad \exists z \quad , \quad \ldots$$

Parte 6

Exercícios

Exercício 2

Para cada enunciado abaixo, determine uma legenda para a sua simbolização e simbolize-o, de acordo com a legenda determinada.

(i) *todos são covardes*

(ii) *alguns são corajosos*

(iii) *todas as mulheres são meigas*

(iv) *alguns homens são brutos*

(v) *todos os quadrados são losangos e retângulos*

(vi) *alguns triângulos são isósceles e escalenos*

(vii) *todas as figuras planas têm duas dimensões*

(viii) *algumas figuras tridimensionais só têm duas dimensões*

(ix) *cada número que eu escolhi é primo*

(x) *certos números não são primos e nem compostos*

Exercício 4

Para cada enunciado abaixo, determine uma legenda para a sua simbolização e simbolize-o, de acordo com a legenda determinada.

(i) *todos são jovens e inocentes*

(ii) *tudo é quadrado ou redondo*

(iii) *cada um é feliz se, e somente se, é ingênuo*

(iv) *existem pulgas ou carrapatos*

(v) *alguns quando coagidos reagem*

(vi) *tem quem ajuda o próximo se, e somente se, é pago para isto*

Exercício 3

Para cada enunciado abaixo, determine uma legenda para a sua simbolização e simbolize-o, de acordo com a legenda determinada.

(i) *nem todos são iguais*

(ii) *não existe aquecimento global*

(iii) *todos sorriem, mas alguns são tristes*

(iv) *alguns sobrevivem ou todos os esforços são em vão*

(v) *se todos praticam esportes, alguns são campeões*

Exercício 4

Simbolizar as sentenças:

(i) *Romeu ama Julieta*

(ii) *Romeu e Julieta se amam*

(iii) *todos amam Romeu e amam Julieta*

(iv) *todos amam a peça Romeu e Julieta*

(v) *a mãe de Julieta não ama Romeu e ama Julieta*

(vi) *o pai de Romeu detesta Julieta*

(vii) *Romeu é amado por alguém e Julieta é amada por alguém*

(viii) *Romeu não é amado por todos e Julieta não é amada por alguém*

(ix) *qualquer um que ama Romeu, ama Julieta*

(x) *qualquer um que ama Romeu, ama Julieta, e vice-versa*

Mais exercícios

1. Ler o texto da Aula 13.

2. Resolver os exercícios da Lista 13.