GAN00166: Lógica para Ciência da Computação

Texto da Aula 17

Interpretaçãoes em LQ

Petrucio Viana
Departamento de Análise, IME–UFF

Sumário

Neste texto, abordamos os conceitos de *domínio de avaliação* (Seção 1); *avaliação de enunciados quantificados* (Seção 2); e *interpretação para um enunciado simbolizado quantificado* (Seção 3) — principalmente para enunciados possuem uma única ocorrência de quantificador (no início) e só possuem ocorrências de propriedades.

Depois de estudarmos este texto, vamos ser capazes de: determinar um domínio no qual um dado enunciado quantificado é V (Exercício 1), avaliar um enunciado quantificado em um dado domínio (Exercício 2) determinar um domínio no qual um dado enunciado quantificado é V e um outro no qual ele é F (Exercício 3); avaliar enunciados em uma dada interpretação (Exercício 4); definir uma interpretação sobre os números naturais na qual um dado enunciado é V e outra na qual ele é F (Exercício 5).

1 Domínios de avaliação

Com vimos na Seção 1 da Parte 2 do Texto da Semana 5, a ocorrência de um quantificador em um enunciado está sempre associada a ocorrência de uma variável. Esta, por sua vez, está sempre associada a uma totalidade de objetos. Assim, a ocorrência do quantificador também está associada a uma totalidade de objetos. De uma maneira geral, o valor do enunciado quantificado depende da totalidade de objetos considerada.

Exemplo 1 (a) A generalização

$$\forall x(0 \leq x)$$

é V quando o domínio do $\forall$ é formado pelos números naturais: 0, 1, 2, 3, ...

De fato, neste caso, o enunciado componente

$$0 \leq x$$

é V para todos os valores que x pode assumir.

Por outro lado, esta mesma generalização é F quando o domínio do $\forall$ é formado pelos números inteiros: $\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$.

De fato, neste caso, o enunciado componente é F quando x assume como valor, por exemplo, o -1.

(b) A existencialização

existem quadrúpedes

é V quando o domínio do $\exists$ é formado pelos animais da Fundação RIOZOO.

De fato, neste caso, o enunciado componente

y é quadrúpede

é V quando y assume como valor, por exemplo, um camelo.

Por outro lado, esta mesma existencialização é F quando o domínio do $\exists$ é formado pelas pessoas que estão visitando o zoológico. De fato, neste caso, o enunciado componente é F para todos os valores que y pode assumir. $\square$

O Exemplo 1 mostra que quando estamos avaliando um enunciado que possui ocorrência de quantificador, devemos prestar muita atenção na totalidade de objetos à qual o quantificador está associado. Em outras palavras:

> Cada ocorrência de quantificador em um enunciado está associada a um *domínio de avaliação.*
>
> Cada domínio de avaliação contém todos os valores possíveis que o pronome ou a variável associada àquela ocorrência pode assumir.
>
> O valor do enunciado quantificado pode depender do domínio de avaliação considerado.

Além disso, se o contexto permite, dependendo de como interpretamos o enunciado quantificado, há várias alternativas para a escolha do domínio de avaliação.

Exemplo 2 (a) Um domínio possível para o enunciado

$$\forall z\ (z \text{ possui raiz quadrada})$$

é o formado por todos os números reais não negativos e, neste caso, ele é V.

Um outro domínio possível é o formado por todos os números reais e, neste caso, ele é F.

(b) Um domínio possível para o enunciado

existem seres vivos

é o formado por todos os objetos na Terra e, neste caso, ele é V.

Um outro domínio possível é o formado por todos os objetos em Marte e, neste caso (no momento em que este texto foi escrito) ele é F. □

De uma maneira geral, temos:

Seja φ um enunciado e $\mathsf{Q}v$ uma ocorrência de um dos quantificadores $\forall$ ou $\exists$, seguida de uma variável v, em φ.

De acordo com as regras de formação dos quantificadores $\forall$ e $\exists$, a frase $\mathsf{Q}v$ ocorre em φ porque, durante a formação de φ, ela foi aplicada a um enunciado $\psi(v)$ que possui ocorrência de v.

Um *domínio de avaliação* para a ocorrência $\mathsf{Q}v$ é uma totalidade de objetos para os quais faz sentido perguntar se o enunciado

$$\mathsf{Q}v[\psi(v)]$$

é V ou F.

Exemplo 3 (a) Ao ler o enunciado

$$\forall x(x \text{ é invertível})$$

isoladamente, um aluno de Ensino Básico, provavelmente, irá considerar como totalidade um domínio formado por números.

Já um aluno do Ensino Médio ou do Ensino Superior, diante do mesmo enunciado isolado, provavelmente, terá dúvidas se deve considerar um domínio formado por números, matrizes ou, até mesmo, funções.

(b) Ao ler o enunciado

$$\exists x(x \text{ é perfeito})$$

isoladamente, um matemático pode considerar como totalidade o domínio dos números naturais, onde um número natural é *perfeito* quando é igual a soma dos seus divisores próprios.

Já uma pessoa sem formação matemática, diante do mesmo enunciado isolado, provavelmente, terá dúvidas se deve considerar um domínio formado por peças manufaturadas, pessoas ou, até mesmo, entidades divinas.

1.1 Observações

Observação 1 É importante ter em mente que:

(1) a determinação dos domínios depende do significado que damos ao enunciado e pode variar de um contexto para o outro;

e que, de maneira recíproca,

(2) o significado do enunciado pode depender dos domínios considerados e, também, pode variar de um contexto para o outro.

1.2 Exercícios

Exercício 1 Para cada enunciado abaixo: (1) se for necessário, reescreva-o, explicitando as ocorrências de variáveis; (2) determine um domínio no qual o enunciado é V.

(i) $\exists x(x^2 - 3x + 2 = 0)$
(ii) $\forall x(x^2 - x = 0)$
(iii) existem animais herbívoros
(iv) todos são jogadores de futebol
(v) $\exists y(y < 0)$
(vi) $\forall u(\frac{u}{3} + \frac{u}{4} = 7)$

Antes de ler as resoluções, tente resolver os exercícios usando os conceitos estudados.

***Resolução do Exercício* ??:** (i) Domínio: formado pelos números reais. (ii) Domínio: formado pelos números 0 e 1. (iii) Domínio: formado pelas vacas de uma fazenda. (iv) Domínio: formado pela seleção brasileira de futebol. (v) Domínio: formado pelos números inteiros. (vi) Domínio: formado pelo número 12.

2 Avaliação de enunciados quantificados

As frases

existe(m) , todo(s)

são chamadas de quantificadores porque são usadas para afirmar que, dentre os vários objetos do domínio em questão, uma certa quantidade deles satisfaz, cada um, o enunciado sobre o qual elas foram aplicadas:

quantificador	*quantidade*
existe(m)	ao menos um objeto
todo(s)	todos os objetos

Exemplo 4 (a) O enunciado

existem sapos (1)

afirma que ao menos um objeto no domínio em questão satisfaz à propriedade

ser sapo.

Em geral, existe uma quantidade muito grande de sapos. Mas, se estamos analisando (1) logicamente e assumimos que ele é V, a partir daí só podemos inferir que algum objeto do domínio em questão (não podemos determinar exatamente quantos) satisfaz à propriedade

ser sapo.

Em resumo, (1) é V em um dado domínio, se ao menos um objeto considerado naquele domínio é um sapo. E (1) é F em um dado domínio, se todo objeto considerado naquele domínio não é um sapo.

(b) O enunciado

todos são príncipes (2)

afirma que todos os objetos no domínio em questão satisfazem à propriedade

ser príncipe.

Em geral, existem muitos objetos que não são príncipes. Mas, se estamos analisando (2) logicamente e assumimos que ele é V, a partir daí só podemos inferir que todos os objetos do domínio em questão (sem exceções) satisfazem à propriedade

ser princípe.

Em resumo, (2) é V em um dado domínio, se todo objeto considerado naquele domínio é um príncipe. E (2) é F em um dado domínio, se algum objeto considerado naquele domínio não é um príncipe.

(c) O enunciado

existem triângulos retângulos (3)

afirma que ao menos um objeto no domínio em questão satisfaz simultaneamente às duas propriedades

ser triângulo
ter um ângulo reto.

Em geral, existe uma quantidade infinita de triângulos retângulos. Mas, se (3) é V, só podemos concluir que algum objeto do domínio em questão (não podemos determinar exatamente quantos) satisfaz às duas propriedades

ser triângulo
ter um ângulo reto.

(d) O enunciado

todas as pessoas são respeitadas (4)

afirma que todos os objetos no domínio em questão que satisfazem à propriedade

ser pessoa,

também satisfaz à propriedade

ser respeitado.

Em geral, existem pessoas que não são respeitadas e, também, existem muitos objetos que não são sequer pessoas, quanto mais respeitadas. Mas se (4) é V, somos obrigados a inferir que todos os objetos do domínio em questão (sem exceções) que satisfazem à propriedade

ser pessoa

também satisfaz à propriedade

ser respeitado.

□

O Exemplo 4 ilustra que, quanto à avaliação de enunciados formados por seu intermédio, em Matemática, os quantificadores são usados de acordo com as seguinte ideias:

Regra de avaliação do para todo:

Em matemática, quando generalizamos um enunciado aberto $\varphi(v)$, afirmamos que o enunciado $\varphi(v)$ é V para todos os valores que a variável v pode assumir, no domínio de quantificação, D, considerado:

$\forall v[\varphi(v)]$ é V em D
quando
$\varphi(v)$ é V para todos os valores que v pode assumir em D;

$\forall v[\varphi(v)]$ é F em D
quando
$\varphi(v)$ é F para ao menos um dos valores que v pode assumir em D.

Isto pode ser resumido na *regra de avaliação do para todo*:

$\varphi(v)$	$\forall v[\varphi(v)]$
V para todos os valores de v em D	V
F para ao menos um dos valores de v em D	F

Exemplo 5 (a) A generalização

$$\forall x \; (x \text{ é primo})$$

é V no domínio

$$D : \text{formado por } 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 23,$$

pois os enunciados

$$2 \text{ é primo}$$

$$3 \text{ é primo}$$

$$\vdots$$

$$23 \text{ é primo}$$

obtidos a partir do enunciado

$$x \text{ é primo}$$

pela substituição sucessiva da variável x pelos números $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 23$, que compõem D, são todos V.

A mesma generalização é F no domínio

$$D' : \text{formado por } 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,$$

pois, por exemplo, o enunciado

$$4 \text{ é primo}$$

é F.

(b) A generalização

$$\forall x \; (x^2 - x = 0)$$

é F no domínio

$$D : \text{formado pelos números reais},$$

pois, por exemplo, o enunciado

$$2^2 - 2 = 0$$

obtido a partir do enunciado

$$x^2 - x = 0$$

pela substituição da variável x pelo número 2, que está em D, é F.

A mesma generalizaçã é V no domínio

$$D' : \text{formado por } 0 \text{ e } 1,$$

pois os enunciados

$$0^2 - 0 = 0$$

$$1^2 - 1 = 0$$

são ambos V.

Regra de avaliação do <u>existe</u>:

Em matemática, quando existencializamos um enunciado aberto $\varphi(v)$, afirmamos que o enunciado $\varphi(v)$ é V para ao menos um dos valores que a variável v pode assumir, no domínio de quantificação, D, considerado:

$\exists v[\varphi(v)]$ é V em D
quando
$\varphi(v)$ é <u>V para ao menos um dos valores</u> que v pode assumir em D;

$\exists v[\varphi(v)]$ é F em D
quando
$\varphi(v)$ é <u>F para todos os valores</u> que v pode assumir em D.

Isto pode ser resumido na *regra de avaliação do existe*:

$\varphi(v)$	$\exists v[\varphi(v)]$
V para ao menos um dos valores de v em D	V
F para todos os valores de v em D	F

Exemplo 6 (a) A existencialização

$$\exists x\ (x^2 - x - 1 = 0)$$

é V no domínio

$$D : \text{formado pelos números reais,}$$

pois o enunciado

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 = 0$$

obtido a partir do enunciado

$$x^2 - x - 1 = 0$$

pela substituição da variável x pelo número $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, que está em D, é V.

(b) A existencialização

$$\exists x\ (x \text{ é par})$$

é F no domínio

$$D : \text{formado por } 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15,$$

pois os enunciados

$$1 \text{ é par}$$

$$3 \text{ é par}$$

$$\vdots$$

$$15 \text{ é par}$$

obtidos a partir do enunciado

$$x \text{ é par}$$

pela substituição sucessiva da variável x pelos números $1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15$, que compôem D, são todos F.

2.1 Observações

Observação 2 Em termos semânticos, o $\forall$ é equivalente a um $\wedge$ generalizado.

Por exemplo, considere o domínio dos números naturais: $0, 1, 2, \ldots, n, \ldots$

O enunciado

$$\text{todos são maiores que } 0 \tag{5}$$

é F neste domínio, pois o primeiro dos enunciados:

$$0 \text{ é maior que } 0$$
$$1 \text{ é maior que } 0$$
$$2 \text{ é maior que } 0$$
$$\ldots$$

é F (embora todos os outros sejam V).

Analogamente, o enunciado

$$\text{todos são inteiros} \tag{6}$$

é V neste domínio, pois todos os enunciados:

$$0 \text{ é um inteiro}$$
$$1 \text{ é um inteiro}$$
$$2 \text{ é um inteiro}$$
$$\vdots$$

são verdadeiros.

Compare este comportamento do $\forall$ com a Tabela de Avaliação do $\wedge$.

Observação 3 Em termos semânticos, o $\exists$ é equivalente a um $\vee$ generalizado.

Por exemplo, considere o domínio dos números naturais: $0, 1, 2, \ldots, n, \ldots$

O enunciado

$$\textsf{existe um elemento que é par e primo} \tag{7}$$

é V neste domínio, pois o terceiro dos enunciados:

$$\begin{array}{c} 0 \textsf{ é par e } 0 \textsf{ primo} \\ 1 \textsf{ é par e } 1 \textsf{ primo} \\ 2 \textsf{ é par e } 2 \textsf{ primo,} \\ \vdots \end{array}$$

é V (embora todos os outros sejam F).

Analogamente, o enunciado

$$\textsf{existe um natural que é irracional} \tag{8}$$

é F neste domínio, assim como são F todos os enunciados:

$$\begin{array}{c} 0 \textsf{ é natural e } 0 \textsf{ é irracional,} \\ 1 \textsf{ é natural e } 1 \textsf{ é irracional,} \\ 2 \textsf{ é natural e } 2 \textsf{ é irracional,} \\ \vdots \end{array}$$

Compare este comportamento do $\exists$ com a Tabela de Avaliação do $\vee$.

Observação 4 Nos exercícios a seguir, vamos avaliar alguns enunciados que possuem ocorrências de quantificadores.

> Se você tiver dificuldades em resolver este exercício, não desanime: a análise de enunciados que possuem ocorrências de quantificadores pode não ser uma tarefa fácil e só será levada a termo com prática e perseverança.

2.2 Exercício

Exercício 2 Para cada enunciado abaixo, determine se ele é V ou F, no domínio formado pelos números 0, 1, 2, 3, 4 e 5.

$$\begin{array}{llll} \text{(i)} & \forall x(x+2>4) & \text{(ii)} & \exists y(3y-1=14) \\ \text{(iii)} & \exists z(z^2-1=3) & \text{(iv)} & \forall u(u-5<1) \end{array}$$

Exercício 3 Para cada enunciado abaixo, determine (a) o quantificador, $\forall$ ou $\exists$, que ocorre nele; (b) a propriedade P que ocorre nele — para isto, reescreva-o na forma adequada, $\forall v\ (v \textsf{ é } P)$ ou $\exists v\ (v \textsf{ é } P)$, explicitando o quantificador, a variável e a propriedade —; (c) um domínio de quantificação para o quantificador que ocorre nele, de maneira que, se for possível, o enunciado seja V; (d) um domínio de quantificação para o quantificador que ocorre nele, de maneira que, se for possível, o enunciado seja F — usualmente, tentamos escolher domínios intuitivamente claros, de modo a não sobrecarregar a interpretação do enunciado.

(i)	tudo é número	(ii)	há átomos
(iii)	cada um é atleta	(iv)	alguns são inteligentes
(v)	qualquer um é par	(vi)	todos são primos

Antes de ler a resolução, tente resolver o exercício usando os conceitos estudados.

***Resolução do Exercício 2*:** (i) No domínio considerado, o enunciado é equivalente a $[0+2>4]\wedge[1+2>4]\wedge[2+2>4]\wedge[3+2>4]\wedge[4+2>4]\wedge[5+2>4]$ que é F, pois $0+2>4$ é F. Assim, o enunciado original é F. (ii) No domínio considerado, o enunciado é equivalente a $[(3\times 0)-1 = 14\vee[(3\times 1)-1=14]\vee[(3\times 2)-1=14]\vee[(3\times 3)-1=14]\vee[(3\times 4)-1=14]\vee[(3\times 5)-1=14]$ que é V, pois $(3\times 5)-1=14$ é V. Assim, o enunciado original é V. (iii) No domínio considerado, o enunciado é equivalente a $[0^2-1=3]\vee[1^2-1=3]\vee[2^2-1=3]\vee[3^2-1=3]\vee[4^2-1=3]\vee[5^2-1=3]$ que é V, pois $2^2-1=3$ é V. Assim, o enunciado original é V. (iv) No domínio considerado, o enunciado é equivalente a $[0-5<1]\wedge[1-5<1]\wedge[2-5<1]\wedge[3-5<1]\wedge[4-5<1]\wedge[5-5<1]$ que é V, pois todos os componentes são V. Assim, o enunciado original é V. ***Resolução do Exercício 3*:** (i) Quantificador: $\forall$. Propriedade: ser número. Enunciado reescrito: $\forall x$ (x é número). Domínio no qual o enunciado é V: qualquer domínio formado apenas por números, por exemplo, o formado pelos números naturais. Domínio no qual o enunciado é F: qualquer domínio que possua um objeto que não é número, por exemplo, o formado por 0 e Lula. (ii) Quantificador: $\exists$. Propriedade: ser átomo. Enunciado reescrito: $\exists x$ (x é átomo). Domínio no qual o enunciado é V: o universo. Domínio no qual o enunciado é F: o éter. (iii) Quantificador: $\forall$. Propriedade: ser atleta. Enunciado reescrito: $\forall x$ (x é atleta). Domínio no qual o enunciado é V: por exemplo, o formado pelos jogadores da Seleção Brasileira de Futebol. Domínio no qual o enunciado é F: por exemplo, o formado pelas pessoas que, usualmente, vão a um estádio de futebol. (iv) Quantificador: $\exists$. Propriedade: ser inteligente. Enunciado reescrito: $\exists x$ (x é inteligente). Domínio no qual o enunciado é V: por exemplo, o formado pelos grandes cientistas da humanidade. Domínio no qual o enunciado é F: por exemplo, o formado por todos os brinquedos em uma loja. (v) Quantificador: $\forall$. Propriedade: ser par. Enunciado reescrito: $\forall x$ (x é par). Domínio no qual o enunciado é V: por exemplo, o formado pelos números 2, 4 e 6. Domínio no qual o enunciado é F: por exemplo, o formado pelos números 1, 2 e 3. (vi) Quantificador: $\forall$. Propriedade: ser primo. Enunciado reescrito: $\forall x$ (x é primo). Domínio no qual o enunciado é V: por exemplo, o formado pelos números 2, 3 e 5. Domínio no qual o enunciado é F: por exemplo, o formado pelos números 1, 2 e 3.

3 Interpretações para um enunciado simbolizado quantificado

Como vimos na Parte 1 do texto da Semana 3, dado um enunciado simbolizado φ, que só possui ocorrências de conectivos, para efeitos de análise lógica, uma interpretação para φ é uma atribuição de valores, V ou F, aos enunciados atômicos que ocorrem em φ. Agora, se φ possui ocorrência de quantificador, duas características impossibilitam que φ seja interpretado de uma maneira tão direta, a partir dos seus componentes:

(1) ocorrências de variáveis livres nos seus componentes, que são quantificadas quando φ é formado;

(2) dependência do valor de φ não só aos componentes, mas também ao domínio de avaliação considerado.

Para interpretar enunciados que possuem ocorrências de quantificadores, precisamos de uma noção de interpretação que dê conta destas características.

Vamos iniciar considerando os enunciados mais simples e vamos, gradativamente, considerando enunciados cada vez mais complexos.

Seja $\mathsf{Q}v[\varphi(v)]$ um enunciado simbolizado, formado por aplicação de um quantificador Q a um enunciado atômico $\varphi(v)$ que possui ocorrência livre da variável v.

Para determinarmos um valor para $\mathsf{Q}v[\varphi(v)]$, devemos saber:

1. a qual domínio $\mathsf{Q}v$ diz respeito;
2. qual é a propriedade que $\varphi(v)$ representa, neste domínio.

Observe que não vamos explicitar um valor para a variável v pois, em geral, para determinarmos o valor de um enunciado $\mathsf{Q}v[\varphi(v)]$, não é suficiente conhecermos um valor específico da variável v, mas é necessário sabermos em que domínio ela toma valores.

Exemplo 7 O enunciado simbolizado

$$\forall x[p(x)]$$

possui ocorrência do $\forall$ e tem $p(x)$ como componente. Assim, para determinarmos um valor para $\forall x[p(x)]$, devemos determinar um domínio D e um significado para a propriedade p em D.

(a) Por exemplo, se escolhemos

$$\begin{array}{lll} D & : & \textsf{formado por todos os cientistas} \\ p & : & \textsf{ser do sexo masculino,} \end{array}$$

o enunciado “significa”:

$$\forall x\ (x \textsf{ é do sexo masculino}),$$

ou seja,

todos são do sexo masculino.

Observe que, na interpretação escolhida, o enunciado é F pois, por exemplo, se x : Marie Curie, temos $p(x) : F$.

(b) Porém, se escolhemos

D : formado por todos os números naturais não nulos
p : ser positivo,

o enunciado "significa":

$$\forall x \; (x \text{ é positivo}),$$

ou seja,

todos são positivos.

Observe que, na interpretação escolhida, o enunciado é V pois temos $p(x) : V$ para todos os valores de x. □

Vamos agora, considerar enunciados quantificados um pouco mais complexos — que generalizam os enunciados anteriores — a saber: quantificações de enunciados obtidos por aplicações de conectivos a enunciados atômicos.

Seja $\mathsf{Q}v[\varphi(v)]$ um enunciado simbolizado, formado por aplicação de um quantificador Q a um enunciado molecular $\varphi(v)$, formado por aplicações dos conectivos aos componentes atômicos $\varphi_1(v)$, $\varphi_2(v)$, ..., $\varphi_n(v)$, que possuem ocorrência(s) livre(s) da variável v.

Para determinarmos um valor para $\mathsf{Q}v[\varphi(v)]$, devemos saber:

1. a qual domínio $\mathsf{Q}v$ diz respeito;

   e, também,

2. quais são as propriedades que $\varphi_1(v)$, $\varphi_2(v)$, ..., $\varphi_n(v)$ representam, neste domínio.

Novamente, não vamos explicitar um valor para a variável v.

Exemplo 8 O enunciado simbolizado

$$\exists y[\neg q(y)]$$

possui ocorrência do $\exists$ e tem $q(y)$ como componente. Assim, para determinarmos um valor para $\exists y[\neg q(y)]$, devemos determinar um domínio D e um significado para a propriedade q em D.

(a) Por exemplo, se escolhemos

D : formado por todas as pessoas
q : ter automóvel,

o enunciado “significa”:

$$\exists y \neg (y \text{ tem automóvel}),$$

ou seja,

$$\text{alguém não tem automóvel.}$$

Observe que, na interpretação escolhida, o enunciado é V pois não é difícil (para cada um em particular) determinar um valor de y que não tem automóvel.

(b) Porém, se escolhemos

$$\begin{aligned} D &: \text{ formado por todos os números pares} \\ q &: \text{ ser múltiplo de } 2, \end{aligned}$$

o enunciado “significa”:

$$\exists y \neg (y \text{ é múltiplo de } 2),$$

ou seja,

$$\text{existem aqueles que não são múltiplos de } 2.$$

Observe que, na interpretação escolhida, o enunciado é F pois temos $p(x) : F$ para todos os valores de x. □

Exemplo 9 O enunciado simbolizado

$$\forall z[r(z) \wedge \neg s(z)]$$

possui ocorrência do $\forall$ e tem $r(z)$ e $s(z)$ como componentes. Assim, para determinarmos um valor para $\forall z[r(z) \wedge s(z)]$, devemos determinar um domínio D e um significado para as propriedades r e s em D.

(a) Por exemplo, se escolhemos

$$\begin{aligned} D &: \text{ formado por todos os mamíferos} \\ r &: \text{ ter quatro patas} \\ s &: \text{ ser carnívoro}, \end{aligned}$$

o enunciado “significa”:

$$\forall z \ (z \text{ tem quatro patas} \wedge z \text{ é carnívoro}),$$

ou seja,

$$\text{todos têm quatro patas e são carnívoros.}$$

Observe que, na interpretação escolhida, o enunciado é F pois não é difícil (para cada um em particular) determinar um valor de z que não tem quatro patas ou não é carnívoro.

(b) Porém, se escolhemos

$$\begin{aligned} D &: \text{ formado por todos os triângulos} \\ r &: \text{ ter três lados} \\ s &: \text{ ter três ângulos}, \end{aligned}$$

o enunciado "significa":

$$\forall z \; (z \text{ tem três lados} \wedge z \text{ tem três ângulos}),$$

ou seja,

todos têm três lados e têm três ângulos.

Observe que, na interpretação escolhida, o enunciado é V pois temos $r(z) \wedge s(z) : V$ para todos os valores de z. □

Podemos, agora, considerar enunciados ainda um pouco mais complexos — que generalizam os enunciados anteriores — ou seja, enunciados obtidos pela aplicação de conectivos a enunciados com uma ocorrência de quantificador no início. Para isto, basta utilizar as diretrizes acima em conjunto sobre todo o enunciado.

Exemplo 10 O enunciado simbolizado

$$\forall x[p(x)] \rightarrow \exists y[q(y)]$$

possui uma ocorrência de $\forall$, outra de $\exists$ e tem $p(x)$ e $q(y)$ como componentes. Assim, para determinar um valor para $\forall x[p(x)] \rightarrow \exists y[q(y)]$, devemos determinar um domínio D e significados para as propriedades p e q em D.

(a) Por exemplo, se escolhemos

$$\begin{array}{lcl} D & : & \text{formado por todos os animais} \\ p & : & \text{ser mortal} \\ q & : & \text{ser mamífero,} \end{array}$$

o enunciado "significa":

$$\forall x \; (x \text{ é mortal}) \rightarrow \exists y \; (y \text{ é mamífero}),$$

ou seja,

se todos são mortais, então existem mamíferos.

Observe que, na interpretação escolhida, $p(x) : V$ para todos os valores de x. Assim, o antecedente da implicação é V. Além disso, na interpretação escolhida, $q(y) : V$ para algum valor de y. Assim, o consequente da implicação também é V. Logo, na interpretação escolhida, o enunciado é V.

(b) Porém, se temos

$$\begin{array}{lcl} D & : & \text{formado por todos os números naturais} \\ p & : & \text{ser positivo} \\ q & : & \text{ser divisível por } 0, \end{array}$$

o enunciado "significa":

$$\forall x \; (x \text{ é positivo}) \rightarrow \exists y \; (y \text{ é divisível por } 0),$$

ou seja,

se todos são positivos, então existem divisíveis por 0.

Observe que, na interpretação escolhida, $p(x) : V$ para todos os valores de x. Assim, o antecedente da implicação é V. Além disso, na interpretação escolhida, $q(y) : F$ para todos os valores de y. Assim, o consequente da implicação é F. Logo, na interpretação escolhida, o enunciado é F.

Exemplo 11 O enunciado simbolizado

$$\forall u[r(u)] \wedge \exists v[s(v)]$$

possui uma ocorrência de $\forall$, outra de $\exists$ e tem $r(u)$ e $s(v)$ como componentes. Assim, para determinar um valor para $\forall u[r(u)] \wedge \exists v[s(v)]$, devemos determinar um domínio D e significados para as propriedades r e s D.

(a) Por exemplo, se escolhemos

$$\begin{array}{lcl} D & : & \textsf{formado por todos os seres} \\ r & : & \textsf{ser racional} \\ s & : & \textsf{ser irracional}, \end{array}$$

o enunciado "significa":

$$\forall u \ [u \ \textsf{é racional}] \wedge \exists v \ [v \ \textsf{é irracional}],$$

ou seja,

todos são racionais e existe um irracional.

Observe que, na interpretação escolhida, $r(u) : F$ para algum valor de u. Assim, o primeiro componente da conjunção é F. Logo, na interpretação escolhida, o enunciado é F.

(b) Porém, se escolhemos

$$\begin{array}{lcl} D & : & \textsf{ser quadrilátero} \\ r & : & \textsf{ter quatro ângulos} \\ s & : & \textsf{ser quadrado}, \end{array}$$

o enunciado "significa":

$$\forall u \ [u \ \textsf{tem quatro ângulos}] \wedge \exists v \ [v \ \textsf{é quadrado}],$$

ou seja,

todos têm quatro ângulos e existem quadrados.

Observe que, na interpretação escolhida, $r(u) : V$ para todos os valores de u. Assim, o primeiro componente da conjunção é V. Além disso, na interpretação escolhida, $s(v) : V$ para todos os valores de v. Assim, o segundo componente da conjunção também é V. Logo, na interpretação escolhida, o enunciado é V. $\square$

Interpretações para um enunciado

A partir dos Exemplos 7 a 11, podemos concluir que interpretar enunciados simbolizados que possuem ocorrências de quantificadores não é tão simples quanto interpretar enunciados que possuem apenas ocorrências de conectivos. No caso dos conectivos, é suficiente atribuir V ou F aos enunciados atômicos componentes; no caso dos quantificadores, usualmente, a interpretação exige uma dose maior de imaginação.

> Uma *interpretação* para um enunciado simbolizado φ, que possui ocorrência de quantificadores, consiste dos seguintes itens:
>
> – um domínio D correspondente aos quantificadores que ocorre em φ;
>
> – significados em D para todas as propriedades p_1, p_2, ..., p_n que ocorrem em nos componentes de φ.

3.1 Observações

Observação 5 Seja φ um enunciado que possui ocorrência(s) de quantificador(es).

Para que uma interpretação para φ esteja inteiramente definida, devemos explicitar exatamente a que domínio de avaliação os quantificadores correspondem e quais são exatamente as propriedades consideradas.

Por exemplo, o enunciado simbolizado

$$\forall x[p(x) \vee q(x)] \wedge \exists y[r(y) \wedge s(y)]$$

possui uma ocorrência de $\forall$, outra de $\exists$ e tem $p(x)$, $q(x)$, $r(y)$ e $s(y)$ como componentes. Assim, aparentemente, uma interpretação para ele poderia ser:

D	:	formado por todos os alunos da turma
p	:	gostar de Matemática
q	:	gostar de Educação Física
r	:	tirar boas notas
s	:	se divertir no recreio

De acordo com esta aparente interpretação, o enunciado afirma que, em certa turma:

todos gostam de Matemática ou de Educação Física
e
alguns tiram boas notas e se divertem no recreio

Mas o esquema acima não é uma interpretação, pois não sabemos de que turma estamos falando: a nossa turma? uma outra turma? etc.

Para definir uma interpretação nestes moldes, devemos especificar exatamente a que turma estamos nos referindo.

Observação 6 Para evitar a utilização de conhecimentos muito específicos — ou até mesmo inacessíveis para a maioria — quando estamos trabalhando com conectivos e quantificadores, usualmente, consideramos como domínio de avaliação o conjunto dos números naturais e utilizamos propriedades bem conhecidas sobre números naturais.

Por exemplo, o enunciado simbolizado

$$\forall x[p(x) \vee q(x)] \wedge \exists y[r(y) \wedge s(y)]$$

pode ser interpretado por:

D : formado por todos os números naturais
p : ser par
q : ser ímpar
r : ser primo
s : ser maior do que 2

De acordo com esta interpretação, o enunciado afirma, simplesmente, que:

todos são pares ou ímpares
e
algum é primo e maior do que 2

Assim, nesta interpretação, o enunciado é V.

3.2 Exercícios

Exercício 4 Considere a seguinte interpretação:

D : formado por todos os números naturais não nulos
p : ser par
q : ser ímpar
r : ser primo
s : ser positivo
t : ser negativo
u : ser quadrado perfeito
v : ser igual a 2

Para cada enunciado simbolizado abaixo, reescreva o enunciado em Língua Portuguesa, de acordo com a interpretação dada, e determine se o enunciado é V ou F:

(i) $\exists x p(x)$
(ii) $\forall x q(x)$
(iii) $\exists x q(x) \wedge \exists y \neg r(y)$
(iv) $\forall x[s(x) \vee t(x)]$
(v) $\forall x[u(x) \rightarrow t(x)]$
(vi) $\forall x\{[p(x) \wedge r(x)] \leftrightarrow v(x)\}$
(vii) $\exists x[p(x) \wedge u(x) \wedge \neg v(x)] \wedge \exists y[q(y) \wedge \neg u(y) \wedge t(y)]$

Exercício 5 Para cada enunciado simbolizado abaixo, determine uma interpretação cujo domínio é formado por todos os número naturais não nulos, na qual o enunciado seja V e uma outra na qual o enunciado seja F.

$$\begin{array}{ll}
\text{(i)} & \exists x p(x) \rightarrow \exists y q(y) \\
\text{(ii)} & \exists x p(x) \rightarrow \forall y p(y) \\
\text{(iii)} & \exists x p(x) \rightarrow \forall y q(y) \\
\text{(iv)} & \forall x p(x) \rightarrow \forall y q(y) \\
\text{(v)} & [\exists y p(y) \wedge \exists z q(z)] \rightarrow \exists x [p(x) \wedge q(x)] \\
\text{(vi)} & \forall x [p(x) \vee q(x)] \rightarrow [\forall y p(y) \vee \forall z q(z)]
\end{array}$$

Antes de ler a resolução, tente resolver o exercício usando os conceitos estudados.

***Resolução do Exercício 4*:** (i) Reescrita: existem pares. Valor: V, pois 2 é par. (ii) Reescrita: todos são ímpares. Valor: F, pois 2 não é ímpar. (iii) Reescrita: existem ímpares e existem não primos, ou seja, existem ímpares e existem compostos, Valor: V, pois 1 é ímpar e que 4 é composto. (iv) Reescrita: todos são positivos ou negativos. Valor: V, pois todos são positivos. (v) Reescrita: todos os quadrados perfeitos são negativos. Valor: F, pois 4 é quadrado perfeito e não é negativo. (vi) Reescrita: qualquer um: é par e primo se, e somente se, é igual a 2. Valor: V, pois sabemos que 2 é o único natural que é par e primo. (vii) Reescrita: existem pares e quadrados perfeitos que não são iguais a 2 e existem ímpares que não são quadrados perfeitos e são negativos. Valor: F, pois todos são positivos. ***Resolução do Exercício 5*:** Interpretações definidas sobre números naturais não nulos. (i) Primeira interpretação: $\begin{array}{lcl} D & : & \mathbb{N}^* \\ p & : & \text{ser par} \\ q & : & \text{ser ímpar.} \end{array}$ Nesta interpretação, o enunciado é se existe um que é par, então existe um que é ímpar. Assim, temos $V \rightarrow V$ e o enunciado é V. Segunda interpretação: $\begin{array}{lcl} D & : & \mathbb{N}^* \\ p & : & \text{ser par} \\ q & : & \text{ser negativo.} \end{array}$ Nesta interpretação, o enunciado é se existe um que é par, então existe um que é negativo. Assim, temos $V \rightarrow F$ e o enunciado é F. (ii) Primeira interpretação: $\begin{array}{lcl} D & : & \mathbb{N}^* \\ p & : & \text{ser positivo.} \end{array}$ Nesta interpretação, o enunciado é se existe um que é positivo, então todos são positivos. Assim, temos $V \rightarrow V$ e o enunciado é V. Segunda interpretação: $\begin{array}{lcl} D & : & \mathbb{N}^* \\ p & : & \text{ser par} \end{array}$ Nesta interpretação, o enunciado é se existe um que é par, então todos são pares. Assim, temos $V \rightarrow F$ e o enunciado é F. (iii) Primeira interpretação: $\begin{array}{lcl} D & : & \mathbb{N}^* \\ p & : & \text{ser par} \\ q & : & \text{ser positivo.} \end{array}$ Nesta interpretação, o enunciado afirma que se existe um que é par, então todos são positivos. Assim, temos $V \rightarrow V$ e o enunciado é V. Segunda interpretação: $\begin{array}{lcl} D & : & \mathbb{N}^* \\ p & : & \text{ser par} \\ q & : & \text{ser negativo.} \end{array}$ Nesta interpretação, o enunciado afirma que se existe um que é par, então todos são negativos. Assim, temos $V \rightarrow F$ e o enunciado é F. (iv) Primeira interpretação: $\begin{array}{lcl} D & : & \mathbb{N}^* \\ p & : & \text{ser positivo} \\ q & : & \text{ser inteiro.} \end{array}$ Nesta interpretação, o enunciado afirma que se todos são positivos, então todos são inteiros. Assim, temos $V \rightarrow V$ e o enunciado é V.

Segunda interpretação: $\begin{array}{lll} D & : & \mathbb{N}^* \\ p & : & \text{ser positivo} \\ q & : & \text{ser negativo.} \end{array}$ Nesta interpretação, o enunciado afirma que se todos são positivos, então todos são negativos. Assim, temos $V \to F$ e o enunciado é F. (v) Primeira interpretação: $\begin{array}{lll} D & : & \mathbb{N}^* \\ p & : & \text{ser par} \\ q & : & \text{ser primo.} \end{array}$ Nesta interpretação, o enunciado afirma que se existe um que é par e existe um que é primo, então existe um que é (simultanemante) par e primo. Assim, temos $V \wedge V \to V$ e o enunciado é V. Segunda interpretação: $\begin{array}{lll} D & : & \mathbb{N}^* \\ p & : & \text{ser par} \\ q & : & \text{ser ímpar.} \end{array}$ Nesta interpretação, o enunciado afirma que se existe um que é par e existe um que é ímpar, então existe um que é (simultanemante) par e ímpar. Assim, temos $V \wedge V \to F$ e o enunciado é F. (vi) Primeira interpretação: $\begin{array}{lll} D & : & \mathbb{N}^* \\ p & : & \text{ser positivos} \\ q & : & \text{ser racional.} \end{array}$ Nesta interpretação, o enunciado afirma que se todos são positivos ou racionais, então todos são positivos ou todos são racionais. Assim, temos $V \to V \vee V$ e o enunciado é V. Segunda interpretação: $\begin{array}{lll} D & : & \mathbb{N}^* \\ p & : & \text{ser par} \\ q & : & \text{ser ímpar.} \end{array}$ Nesta interpretação, o enunciado afirma que se todos são pares ou ímpares, então todos são pares ou todos são ímpares. Assim, temos $V \to F \vee F$ e o enunciado é F.

© 2015 Márcia Cerioli e Petrucio Viana