GAN00166: Lógica para Ciência da Computação

Texto da Aula 16

Transformação e negação por meio de equivalentes em LQ

Petrucio Viana
Departamento de Análise, IME–UFF

Sumário

Neste texto, continuamos com as aplicações dos conceitos e resultados já estudados na resolução de problemas lógicos que estão associados diretamente com a prática matemática. Em particular, estendemos (parcialmente) as noções de equivalência para os enunciados quantificados (Seção 1).

Após estudarmos este texto, vamos ser capazes de: entender a noção de equivalência de enunciados construídos por aplicações de conectivos e quantificadores; entender como podemos aplicar a noção de interpretação para determinar quando dois enunciados simbolizados são equivalentes ou não; justificar que dois enunciados equivalentes são, de fato, equivalentes (Exercício 1); justificar que dois enunciados não equivalentes são, de fato, não equivalentes (Exercício 2).

Vamos, também, obter uma maneira sistemática de reescrever a negação de enunciados que possuem ocorrências de conectivos e quantificadores. Vamos abordar o caso mais simples: a negação de existencializações (Seção 3) e generalizações (Seção 4) que possuem a ocorrência de um único quantificador, no início.

Após estudarmos este texto, vamos ser capazes de: reescrever a negação de enunciados que possuem uma única ocorrência de quantificador, no início (Exercícios 3, 4, 5 e 6).

1 Equivalência de enunciados quantificados

De maneira análoga ao que acontece com enunciados formados por meio de conectivos, na prática, dependendo de como entendemos o significado de um enunciado quantificado, ele pode ser simbolizado de mais de uma maneira.

Exemplo 1 O enunciado

$$\textsf{ninguém é feliz} \tag{1}$$

pode ser interpretado como

$$\textsf{todos são infelizes},$$

se admitimos que ser infeliz é a negação de ser feliz.

Neste caso, de acordo com a legenda

$$f(x) \quad : \quad x \textsf{ é feliz},$$

(1) pode ser simbolizado diretamente como

$$\neg\exists x[f(x)]$$

ou indiretamente como

$$\forall x[\neg f(x)].$$

□

Do que foi dito acima, surge, então, a questão de

> decidir se dois enunciados quantificados, simbolizados de maneira distinta, expressam ou não o mesmo conteúdo.

2 Método das Interpretações para Equivalência

Vamos ver agora como a questão levantada ao final da Seção 1 pode ser resolvida com o uso de interpretações, quando os enunciados em questão só possuem uma ocorrência de quantificador.

A definição de quando dois enunciados são equivalentes é a mesma, para qualquer tipo de enunciado.

> Sejam φ e ψ enunciados simbolizados.
>
> Dizemos que φ e ψ são *equivalentes* se, para cada interpretação para φ e ψ, os valores de φ e ψ são iguais.

O que muda, dos conectivos para os quantificadores, é que — como vimos na Parte 3 do texto da Semana 5 — no caso dos enunciados quantificados simbolizados, a noção de interpretação é um pouco mais elaborada. Especificamente, para interpretar os enunciados

$$\neg\exists x[f(x)]$$

e

$$\forall x[\neg f(x)]$$

devemos determinar:

1. um domínio de quantificação, D, para os quantificadores que ocorrem nos enunciados;
2. uma propriedade sobre elementos de D para ser o significado de f.

Exemplo 2 (a) A interpretação original para os enunciados do Exemplo 1 é:

D : formado por todas as pessoas
f : ser feliz.

(b) Outra interpretação, com o mesmo domíno:

D : formado por todas as pessoas
f : ser rico.

(c) Outra interpretaçãoes com outro domínio e outra propriedade:

D : formado por todos os animais
f : ser bípede.

(d) Uma interpretação que não tem nada a ver com a interpretação original:

D : formado por todos os números reais
f : ser irracional.

□

Assim, temos:

Sejam φ e ψ enunciados simbolizados que possuem ocorrência(s) de quantificador(es) e ocorrências de propriedades dentre p_1, p_2, $\ldots$, p_n.

Dizemos que φ e ψ são *equivalentes* se para qualquer *interpretação conjunta para φ e ψ* — ou seja, qualquer domínio de quantificação D, associado simultaneamente a todos os quantificadores, e quaisquer significados para as propriedades p_1, p_2, $\ldots$, p_n em D — temos que o valor de φ é igual ao valor de ψ.

O que queremos resolver é o *problema da equivalência de enunciados*, isto é, o problema de

dados dois enunciados, classificá-los como equivalentes ou não.

Vamos ver, agora, como podemos utilizar o critério acima para mostrar que certos enunciados bem simples são equivalentes.

Exemplo 3 (a) Como suspeitamos, os enunciados

$$\neg\exists x[f(x)]$$

e

$$\forall x[\neg f(x)]$$

são equivalentes.

De fato, consideremos uma interpretação conjunta arbitrária para $\neg\exists x[f(x)]$ e $\forall x[\neg f(x)]$. Ou seja, um domínio de quantificação D qualquer e uma propriedade qualquer, representada por f, em D.

De acordo com as regras de avaliação do $\neg$, do $\exists$ e do $\forall$, temos que:

$$\neg\exists x[f(x)] : V$$

se, e somente se,

$$\exists x[f(x)] : F$$

se, e somente se,

o enunciado $f(x)$ é F
para todos os valores que
a variável x pode assumir em D

se, e somente se,

para todos os valores que
a variável x pode assumir em D
o enunciado $f(x)$ é F

se, e somente se,

para todos os valores que
a variável x pode assumir em D
o enunciado $\neg f(x)$ é V

se, e somente se,

$$\forall x[\neg f(x)] : V$$

Assim, $\neg\exists x[f(x)] : V$ se, e somente se, $\forall x[\neg f(x)] : V$. Ou seja, $\neg\exists x[f(x)] : F$ se, e somente se, $\forall x[\neg f(x)] : F$.

Logo, $\neg\exists x[f(x)]$ e $\forall x[\neg f(x)]$ têm os mesmos valores em qualquer interpretação conjunta.

(b) De maneira similar, podemos garantir que os enunciados

$$\neg\forall x[f(x)]$$

e

$$\exists x[\neg f(x)]$$

são equivalentes.

De fato, consideremos uma interpretação conjunta arbitrária para $\neg\forall x[f(x)]$ e $\exists x[\neg f(x)]$. Ou seja, um domínio de quantificação, D, qualquer e uma propriedade qualquer, representada por f, em D.

De acordo com as regras de avaliação do $\neg$, do $\exists$ e do $\forall$, temos que:

$$\neg\forall x[f(x)] : V$$

se, e somente se,

$$\forall x[f(x)] : F$$

se, e somente se,

o enunciado $f(x)$ é F
para ao menos um dos valores que
a variável x pode assumir em D

se, e somente se,

para ao menos um dos valores que
a variável x pode assumir em D
o enunciado $f(x)$ é F

se, e somente se,

para ao menos um dos valores que
a variável x pode assumir em D
o enunciado $\neg f(x)$ é V

se, e somente se,

$$\exists x[\neg f(x)] : V$$

Assim, $\neg\forall x[f(x)] : V$ se, e somente se, $\exists x[\neg f(x)] : V$. Ou seja, $\neg\forall x[f(x)] : F$ se, e somente se, $\exists x[\neg f(x)] : F$.

Logo, $\neg\forall x[f(x)]$ e $\exists x[\neg f(x)]$ têm os mesmos valores em qualquer interpretação conjunta. $\square$

O critério acima pode ser convertido em um método para justificar que certos enunciados não são equivalentes.

De fato, como dois enunciados simbolizados são equivalentes quando possuem os mesmos valores em qualquer interpretação, dois enunciados simbolizados não são equivalentes quando possuem valores diferentes em alguma interpretação. Assim, de maneira geral, temos:

> Sejam φ e ψ enunciados simbolizados que possuem ocorrência(s) de quantificador(es) e ocorrências de propriedades dentre $p_1, p_2, \ldots, p_n$.
>
> Dizemos que φ e ψ *não são equivalentes* se, existe ao menos uma *interpretação conjunta para φ e ψ* — ou seja, algum domínio de quantificação D, associado simultaneamente a todos os quantificadores, e significados para as propriedades $p_1, p_2, \ldots, p_n$ em D — no qual o valor de φ é diferente do valor de ψ.

Vamos ver, agora, como podemos utilizar o critério acima para mostrar que certos enunciados bem simples não são equivalentes.

Exemplo 4 (a) Os enunciados

$$\exists x[p(x)]$$

e

$$\forall x[p(x)]$$

não são equivalentes.

Intuitivamente, isto é claro pois, usualmente, quando afirmamos que algum objeto possui uma propriedade não estamos querendo dizer que todos os objetos a possuam. Assim, aparentemente, é possível exibir uma interpretação conjunta para $\exists x[p(x)]$ e $\forall x[p(x)]$, na qual $\exists x[p(x)] : V$ e $\forall x[p(x)] : F$.

De fato, consideremos a interpretação:

$$\begin{array}{lcl} D & : & \text{formado por todos os números naturais} \\ p & : & \text{ser igual a } 0 \end{array}$$

Nesta interpretação o enunciado $\exists x[p(x)]$ "significa"

$$\exists x\ (x \text{ é igual a } 0)$$

ou seja,

$$\text{alguém é igual a } 0$$

e, portanto, é V. Enquanto que o enunciado $\forall x[p(x)]$ "significa"

$$\forall x\ (x \text{ é igual a } 0)$$

ou seja,

$$\text{todos são iguais a } 0$$

e, portanto, é F.

Como exibimos uma interpretação na qual $\exists x[p(x)]$ e $\forall x[p(x)]$ têm valores diferentes, eles não são equivalentes.

(b) Os enunciados
$$\exists y[p(y)] \wedge \exists z[q(z)]$$
e
$$\exists x[p(x) \wedge q(x)]$$
não são equivalentes.

Intuitivamente, isto é claro pois, usualmente, quando afirmamos que existe um objeto que possui uma propriedade e que existe um objeto que possui uma outra propriedade, não estamos querendo dizer que o mesmo objeto possui ambas as propriedades. Assim, aparentemente, é possível exibir uma interpretação conjunta para $\exists y[p(y)] \wedge \exists z[q(z)]$ e $\exists x[p(x) \wedge q(x)]$, na qual $\exists y[p(y)] \wedge \exists z[q(z)] : V$ e $\exists x[p(x) \wedge q(x)] : F$.

De fato, consideremos a interpretação:

D	:	formado por todos os números naturais
p	:	ser par
q	:	ser ímpar

Nesta interpretação o enunciado $\exists y[p(y)] \wedge \exists z[p(z)]$ "significa"
$$\exists y \ (y \text{ é par}) \wedge \exists z \ (z \text{ é ímpar}),$$
ou seja,

alguém é par e existe alguém é ímpar

e, portanto, é V.

Observe que ao interpretarmos $p(y)$ e $p(z)$ de modo a obtermos $\exists y[p(y)] : V$ e $\exists z[p(z)] : V$, nesta interpretação, as variáveis y e z assumem valores diferentes.

Por outro lado, nesta mesma interpretação, o enunciado $\exists x[p(x) \wedge q(x)]$ "significa"
$$\exists x \ (x \text{ é par} \wedge x \text{ ímpar})$$
ou seja,

existe alguém que é, ao mesmo tempo, par e ímpar

e, portanto, é F.

Observe que para interpretarmos $p(x) \wedge q(x)$ de modo a obtermos $\exists x[p(x) \wedge q(x)] : V$, nesta interpretação, o valor de x deveria ser simultaneamente par e ímpar, o que é impossível.

Em linhas gerais, o método que utilizamos nos Exemplos 3(a) e 3(b) para justificar que dois enunciados simbolizados <u>são equivalentes</u> pode ser resumido do seguinte modo:

Método das Interpretações para Equivalência:

Sejam φ e ψ enunciados simbolizados que possuem ocorrência(s) de quantificador(es) e ocorrências de propriedades dentre p_1, p_2, ..., p_n.

(a) Para justificar que φ e ψ são equivalentes, podemos executar os seguintes passos:

1. Considerar uma *interpretação conjunta* genérica para φ e ψ, formada por um domínio de avaliação genérico, D, e n propriedades genéricas, representadas por $p_1, \ldots, p_n$, em D.
2. Utilizar as regras de avaliação dos conectivos e quantificadores para justificar que φ é V se, e somente se, ψ é V.
3. Se o Passo 2 `terminar com sucesso`, então φ e ψ são equivalentes.

(b) Por outro lado, para justificar que φ e ψ não são equivalentes, podemos executar os seguintes passos:

1. Definir uma *interpretação conjunta* especícifca para φ e ψ, formada por um domínio de avaliação específico, D, e n propriedades específicas, representadas por $p_1, \ldots, p_n$, em D.
2. Calcular o valor de φ nesta interpretação; calcular o valor de ψ nesta interpretação.
3. Se os valores são diferentes, então φ e ψ não são equivalentes.

2.1 Observações

Observação 1 Justificar que enunciados quantificados são equivalentes, baseados apenas no Método das Interpretações para Equivalência, é uma tarefa puramente técnica, usualmente, não trivial e que requer muita reflexão e muito cuidado. Além disso, em certos casos, elaborar uma explicação detalhada da equivalência pode requerer raciocínios mais complexos dos que aqueles com os quais estamos acostumados a lidar, até o momento.

Por estas razões, nos limitaremos a tratar apenas dos exemplos mais simples e úteis de equivalências de enunciados quantificados.

Observação 2 Analogamente, justificar que enunciados não são equivalentes, baseados apenas no Método das Interpretações para Equivalência, também é uma tarefa técnica, usualmente, não trivial e que requer um pouco de imaginação. De fato, neste caso devemos exibir ao menos uma interpretação na qual os valores de φ e ψ são diferentes. Esta interpretação pode ser qualquer uma, baseada na realidade ou inventada, desde que os enunciados, quando alí interpretados, tenham valores opostos.

2.2 Exercícios resolvidos

Exercício 1 Mostre, usando interpretações, que os enunciados abaixo são equivalentes:

$$\begin{array}{lccc} \text{(i)} & \exists x[p(x)] & \text{e} & \exists y[p(y)] \\ \text{(ii)} & \forall x[p(x)] & \text{e} & \forall y[p(y)] \end{array}$$

Exercício 2 Mostre, usando interpretações, que os enunciados $\forall x[p(x) \vee q(x)]$ e $\forall x[p(x)] \vee \forall x[p(x)]$ não são equivalentes.

Antes de ler as resoluções, tente resolver o exercício usando os conceitos estudados.

***Resolução do Exercício 1*:** (i) Sejam D um domínio qualquer e p uma propriedade qualquer em D. Temos que $\exists x[p(x)]$ é V sse $p(x)$ é V para ao menos um dos valores que x pode assumir em D sse $p(y)$ é V para ao menos um dos valores que y pode assumir em D sse $\exists y[p(y)]$ é V (observe que se $p(x)$ é V quando $x : d$, temos que $P(y)$ também é V quando $y : d$; e vice-versa). (ii) Sejam D um domínio qualquer e p uma propriedade qualquer em D. Temos que $\forall x[p(x)]$ é V sse para todos os valores que x assume em D, temos que $p(x)$ é V sse para todos os valores que y assume em D, temos que $p(y)$ é V sse $\forall y[p(y)]$ é V (observe que se $p(x)$ fosse F quando $x : d$, teríamos que $P(y)$ também seria F quando $y : d$; e vice-versa). ***Resolução do Exercício 2*:** Considere a interpretação: $\begin{array}{lcl} D & : & \mathbb{N} \\ p & : & \textsf{ser par} \\ q & : & \textsf{ser ímpar.} \end{array}$ Nesta interpretação $\forall x[p(x) \vee q(x)]$ "significa" $\forall x$ (x é par $\vee$ x é ímpar) e, portanto, é V. Enquanto que $\forall x[p(x)] \vee \forall x[q(z)]$ "significa" [$\forall x$ (x é par)] $\vee$ [$\forall x$ (x é ímpar)] e, portanto, é F. Observe que, nesta interpretação, ambos $\forall x(x$ é par$)$: F e $\forall x(x$ é ímpar$)$: F.

3 Negação da existencialização

Seja $\exists v\varphi(v)$ uma existencialização qualquer.

Já sabemos que os enunciados

$$\neg\exists v[\varphi(v)] \quad , \quad \forall v[\neg\varphi(v)]$$

são equivalentes.

Vamos, agora, aplicar esta equivalência, em conjunto com as equivalências estudadas no texto da Semana 3, Parte 3, na reescrita da negação de existenciais.

Exemplo 5 (a) Para encontrar a negação de

alguns são absolvidos,

podemos proceder do seguinte modo.

Primeiro, observamos que o enunciado envolve exatamente uma propriedade:

ser absolvido.

Assim, uma legenda para ele pode ser:

$$p(x) \quad : \quad x \text{ é absolvido.}$$

Como o enunciado afirma que algum x é absolvido, ele pode ser simbolizado como:

$$\exists x[p(x)].$$

Agora, para obter a negação do enunciado, aplicamos uma equivalência:

$$\neg\exists x[p(x)]$$

é equivalente a

$$\forall x\neg[p(x)].$$

Este último enunciado afirma que todo x satisfaz a propriedade $\neg p(x)$, ou seja, não é absolvido. Assim, considerando que ser condenado é a negação de ser absolvido, a negação do enunciado pode ser reescrita como

todos são condenados.

(b) Para encontrar a negação de

existem números que não são primos,

podemos proceder do seguinte modo.

Primeiro, observamos que o enunciado envolve duas propriedades:

ser número , ser primo.

Assim, uma legenda para ele pode ser:

$$p(y) \quad : \quad y \text{ é número}$$
$$q(y) \quad : \quad y \text{ é primo.}$$

Como o enunciado afirma que algum y é simultaneamente número e não primo, ele pode ser simbolizado como:

$$\exists y[p(y) \wedge \neg q(y)].$$

Agora, para obter a negação do enunciado, aplicamos equivalências:

$$\neg\exists y[p(y) \wedge \neg q(y)]$$

é equivalente a

$$\forall y\neg[p(y) \wedge \neg q(y)]$$

é equivalente a

$$\forall y[\neg p(y) \vee \neg\neg q(y)]$$

é equivalente a

$$\forall y[\neg p(y) \vee q(y)]$$

é equivalente a

$$\forall y[p(y) \to q(y)].$$

Este último enunciado afirma que todo y que satisfaz a propriedade $p(y)$, ou seja, é número, também satisfaz a propriedade $q(y)$, ou seja, é primo. Assim, a negação pode ser reescrita como

todos os números são primos.

(c) Para encontrar a negação de

existem números pares que são primos,

podemos proceder do seguinte modo.

Primeiro, observamos que o enunciado envolve três propriedades

ser número , ser par , ser primo.

Neste ponto, você pode estar inclinado a considerar somente duas propriedades:

ser número par , ser primo

pois, de acordo com o significado do enunciado, as duas primeiras propriedades ser número e ser par podem ser agrupadas numa só: ser número par. Mas, lembre-se que — como dissemos na Observação 4.1.1, do texto da Semana 5, Parte 2 — vamos sempre considerar as propriedades isoladamente, ou seja, sem agrupá-las.

Assim, uma legenda para o enunciado pode ser:

$p(z)$: z é número
$q(z)$: z é par
$r(z)$: z é primo.

Como o enunciado afirma que existe z que é simultaneamente número, par e primo, ele pode ser simbolizado como:

$$\exists z[p(z) \wedge q(z) \wedge r(z)],$$

onde a associatividade do $\wedge$ foi usada na eliminação de parênteses redundantes.

Mas, observe que, para salientar o "aspecto conjuntivo" que as propriedades ser número e ser par possuem no enunciado, este fica melhor simbolizado como:

$$\exists z\langle[p(z) \wedge q(z)] \wedge r(z)\rangle.$$

Agora, para obter a negação do enunciado, aplicamos equivalências:

$$\neg\exists z\langle[p(z) \land q(z)] \land r(z)\rangle$$

é equivalente a

$$\forall z \neg\langle[p(z) \land q(z)] \land r(z)\rangle$$

é equivalente a

$$\forall z\langle\neg[p(z) \land q(z)] \lor \neg r(z)\rangle$$

é equivalente a

$$\forall z\langle[p(z) \land q(z)] \rightarrow \neg r(z)\rangle.$$

Este último enunciado afirma que todo z que satisfaz a propriedade $p(z) \land q(z)$, ou seja, é número e par, também satisfaz a propriedade $\neg r(z)$, ou seja, não é primo. Assim, a negação pode ser reescrita como

todos os números pares são compostos.

3.1 Observações

Observação 3 Os itens (b) e (c) do Exemplo 5 seguem a tendência bastante comum, na Linguagem Matemática, de termos o quantificador

existe ao menos um

aplicado a conjunções.

Mas lembre-se que — como dissemos na Observação 5.1.6, do texto da Semana 5, Parte 2 — não é verdade que as únicas ocorrências do existe sejam em existencializações de conjunções. Por exemplo, as frases

existem pares ou ímpares
alguns, se pacientes, conseguem o que querem,

que são existencializações de uma disjunção e de uma implicação, respectivamente, também são exemplos perfeitamente legítimos de enunciados.

3.2 Exercícios resolvidos

Exercício 3 Para cada enunciado abaixo, (a) determine uma legenda, (b) simbolize o enunciado, de acordo com a legenda definida, (c) reescreva a negação do enunciado, usando equivalências.

(i) existem animais
(ii) existem divisores de zero
(iii) existem animais racionais
(iv) alguns números são maiores do que 100
(v) existem pássaros que não voam
(vi) há pessoas ou fantasmas
(vii) alguns, se pacientes, conseguem o que querem
(viii) alguns são caros se, e somente se, são raros

Exercício 4 Para cada enunciado abaixo, (a) determine uma legenda, (b) simbolize o enunciado, de acordo com a legenda definida, (c) reescreva a negação do enunciado, usando equivalências.

(i) nem todo polígono de quatro lados é um quadrado
(ii) existe um número par e primo que não é o 2
(iii) existem números inteiros positivos que não são pares nem ímpares
(iv) ao menos um triângulo retângulo não tem ângulos agudos
(v) há elementos que pertencem a A ou que pertencem a B

Antes de ler as resoluções, tente resolver os exercícios usando os conceitos estudados.

***Resolução do Exercício 3*:** (i) Propriedade: ser animal. Legenda: $a(x)$: x é animal. Afirma que algum x é animal. Simbolização: $\exists x[a(x)]$. Negação: $\neg\exists x[a(x)]$ é equivalente a $\forall x\neg[a(x)]$. Afirma que todo x não é animal. Reescrita: todos não são animais. (ii) Propriedade: ser divisor de zero. Legenda: $d(x)$: x é divisor de zero. Afirma que algum x é divisor de zero. Simbolização: $\exists x[d(x)]$. Negação: $\neg\exists x[d(x)]$ é equivalente a $\forall x\neg[d(x)]$. Afirma que todo x não é divisor de zero. Reescrita: todos não são divisores de zero. (iii) Propriedades: ser animal e ser racional. Legenda: $\begin{array}{lcl} a(x) & : & x \text{ é animal} \\ r(x) & : & x \text{ é racional.} \end{array}$ Afirma que algum x é, simultaneamente, animal e racional. Simbolização: $\exists x[a(x) \wedge r(x)]$. Negação: $\neg\exists x[a(x) \wedge r(x)]$ é equivalente a $\forall x\neg[a(x) \wedge r(x)]$ é equivalente a $\forall x[\neg a(x) \vee \neg r(x)]$ é equivalente a $\forall x[a(x) \to \neg r(x)]$. Afirma que todo x que é animal não é racional. Reescrita: todos os animais são irracionais. (iv) Propriedades: ser número e ser maior do que 100. Legenda: $\begin{array}{lcl} n(x) & : & x \text{ é número} \\ m(x) & : & x \text{ é maior do que } 100. \end{array}$ Afirma que algum x é, simultaneamente, número e maior do que 100. Simbolização: $\exists x[n(x) \wedge m(x)]$. Negação: $\neg\exists x[n(x) \wedge m(x)]$ é equivalente a $\forall x\neg[n(x) \wedge m(x)]$ é equivalente a $\forall x[\neg n(x) \vee \neg m(x)]$ é equivalente a $\forall x[n(x) \to \neg m(x)]$. Afirma que todo x que é número não é maior do que 100. Reescrita: todos os números são menores ou iguais a 100. (v) Propriedades: ser pássaro e voar. Legenda: $\begin{array}{lcl} p(x) & : & x \text{ é pássaro} \\ v(x) & : & x \text{ voa.} \end{array}$ Afirma que algum x é pássaro e não voa. Simbolização: $\exists x[p(x) \wedge \neg v(x)]$. Negação: $\neg\exists x[p(x) \wedge \neg v(x)]$ é equivalente a $\forall x\neg[p(x) \wedge \neg v(x)]$ é equivalente a $\forall x[\neg p(x) \vee \neg\neg v(x)]$ é equivalente a $\forall x[p(x) \to \neg\neg v(x)]$ é equivalente a $\forall x[p(x) \to v(x)]$. Afirma que todo x que é pássaro, voa. Reescrita: todos os pássaros voam. (vi) Propriedades: ser pessoa e ser fantasma. Legenda: $\begin{array}{lcl} p(x) & : & x \text{ é pessoa} \\ f(x) & : & x \text{ é fantasma.} \end{array}$ Afirma que algum x é pessoa ou é fantasma. Simbolização: $\exists x[p(x) \vee f(x)]$. Negação: $\neg\exists x(p(x) \vee f(x))$ é equivalente a $\forall x\neg[p(x) \vee f(x)]$ é equivalente a $\forall x[\neg p(x) \wedge \neg f(x)]$. Afirma que todo x não é pessoa e não é fantasma. Reescrita: todos não são pessoas nem fantasmas. (vii) Propriedades: ser paciente e conseguir o que quer. Legenda: $\begin{array}{lcl} p(x) & : & x \text{ é paciente} \\ q(x) & : & x \text{ consegue o que quer.} \end{array}$ Afirma que algum x quando é paciente, consegue o que quer. Simbolização: $\exists x[p(x) \to q(x)]$. Negação: $\neg\exists x[p(x) \to q(x)]$ é equivalente a $\forall x\neg[p(x) \to q(x)]$ é equivalente a $\forall x[p(x) \wedge \neg q(x)]$. Afirma que todo x é paciente e não consgue o que quer. Reescrita: todos são pacientes mas não conseguem o que querem. (viii) Propriedades: ser caro e ser raro. Legenda: $\begin{array}{lcl} c(x) & : & x \text{ é caro} \\ r(x) & : & x \text{ é raro.} \end{array}$ Afirma que algum x é caro quando, e somente quando, é raro. Simbolização: $\exists x[c(x) \leftrightarrow r(x)]$. Negação: $\neg\exists x[c(x) \leftrightarrow r(x)]$

é equivalente a $\forall x \neg[c(x) \leftrightarrow r(x)]$ é equivalente a $\forall x \langle [c(x) \wedge \neg r(x)] \vee [r(x) \wedge \neg c(x)] \rangle$. Afirma que todo x é caro e não é raro ou, alternativamente, é raro e não é caro. Reescrita: todos são caros e não são raros, ou são raros e não são caros. ***Resolução do Exercício 4*:** (i) Reescrita: não (todo polígono de quatro lados é um quadrado). É uma negação. Negação: todo polígono de quatro lados é um quadrado. (ii) Propriedades: ser número, ser par, ser primo e ser igual a 2. Legenda:

$n(x)$: x é número
$p(x)$: x é par
$r(x)$: x é primo
$d(x)$: x é igual a 2.

Afirma que algum x, simultaneamente, é número, é par, é primo e não é igual a 2. Simbolização: $\exists x \langle [n(x) \wedge p(x) \wedge r(x)] \wedge \neg d(x) \rangle$. Negação: $\neg \exists x \langle [n(x) \wedge p(x) \wedge r(x)] \wedge \neg d(x) \rangle$ é equivalente a $\forall x \neg \langle [n(x) \wedge p(x) \wedge r(x)] \wedge \neg d(x) \rangle$ é equivalente a $\forall x \langle \neg [n(x) \wedge p(x) \wedge r(x)] \vee \neg\neg d(x) \rangle$ é equivalente a $\forall x \langle [n(x) \wedge p(x) \wedge r(x)] \rightarrow \neg\neg d(x) \rangle$ é equivalente a $\forall x \langle [n(x) \wedge p(x) \wedge r(x)] \rightarrow d(x) \rangle$. Afirma que todo x que é número e par e primo é igual a 2. Reescrita: todo número par é divisível por 2. (iii) Propriedades: ser número, ser inteiro, ser positivo, ser par e ser ímpar. Legenda:

$p(x)$: x é número
$q(x)$: x é inteiro
$r(x)$: x é positivo
$s(x)$: x é par
$t(x)$: x é ímpar.

Simbolização: $\exists x \langle [p(x) \wedge q(x) \wedge r(x)] \wedge [\neg s(x) \wedge \neg t(x)] \rangle$. Negação: $\neg \exists x \langle [p(x) \wedge q(x) \wedge r(x)] \wedge [\neg s(x) \wedge \neg t(x)] \rangle$ é equivalente a $\forall x \neg \langle [p(x) \wedge q(x) \wedge r(x)] \wedge [\neg s(x) \wedge \neg t(x)] \rangle$ é equivalente a $\forall x \langle \neg [p(x) \wedge q(x) \wedge r(x)] \vee \neg [\neg s(x) \wedge \neg t(x)] \rangle$ é equivalente a $\forall x \langle \neg [p(x) \wedge q(x) \wedge r(x)] \vee \neg\neg [s(x) \vee t(x)] \rangle$ é equivalente a $\forall x \langle \neg [p(x) \wedge q(x) \wedge r(x)] \vee [s(x) \vee t(x)] \rangle$ é equivalente a $\forall x \langle [p(x) \wedge q(x) \wedge r(x)] \rightarrow [s(x) \vee t(x)] \rangle$. Reescita: todo número inteiro positivo é par ou ímpar. (iv) Você deve chegar a um enunciado simbolizado que pode ser rescrito como todo triângulo retângulo tem ângulo agudo. Observe que, de acordo com a prática matemática, o plural "ângulos agudos" não é lido como "tem mais de um ângulo agudo". (v) Você deve chegar a um enunciado simbolizado que pode ser reescrito como todo elemento que pertence a A não pertence a B.

4 Negação da generalização

Seja $\forall v \varphi(v)$ uma generalização qualquer.

Já sabemos que os enunciados

$$\neg \forall v [\varphi(v)] \quad , \quad \exists v [\neg \varphi(v)]$$

são equivalentes.

Vamos, agora, aplicar esta equivalência, em conjunto com as equivalências estudadas no texto da Semana 3, Parte 3, na reescrita da negação de generalizações.

Exemplo 6 (a) Para encontrar a negação de

todos são irracionais,

podemos proceder do seguinte modo.

Primeiro, observamos que o enunciado envolve exatamente uma propriedade:

ser racional.

Assim, uma legenda para ele pode ser:

$p(x)$: x é racional.

Como o enunciado afirma que todo x é irracional, ou seja, não é racional, ele pode ser simbolizado como:

$$\forall x[\neg p(x)]$$

Agora, para obter a negação do enunciado, aplicamos equivalências:

$$\neg\forall x[\neg p(x)]$$

é equivalente a

$$\exists x[\neg\neg p(x)]$$

é equivalente a

$$\exists x[p(x)].$$

Este último enunciado afirma que existe ao menos um x que satisfaz a propriedade $p(x)$, ou seja, é racional. Assim, a negação pode ser reescrita como

existe ao menos um racional.

(b) Para encontrar a negação de

cada função é descontínua,

podemos proceder do seguinte modo.

Primeiro, observamos que o enunciado envolve exatamente duas propriedades:

ser função , ser contínua,

sendo que esta última ocorre negada no enunciado.

Assim, uma legenda para ele pode ser:

$p(y)$: y é função.
$q(y)$: y é contínua.

Como o enunciado afirma que todo x que é função não é contínua, ele pode ser simbolizado como:

$$\forall y[p(y) \to \neg q(y)].$$

Agora, para obter a negação do enunciado, aplicamos equivalências:

$$\neg\forall y[p(y) \to \neg q(y)]$$

é equivalente a

$$\exists y\neg[p(y) \to \neg q(y)]$$

é equivalente a

$$\exists y[p(y) \land \neg\neg q(y)]$$

é equivalente a

$$\exists y[p(y) \land q(y)].$$

Este último enunciado afirma que existe ao menos um y que satisfaz a propriedade $p(y)$, ou seja, é função, e que também satisfaz a propriedade $q(y)$, ou seja, é contínua. Assim, a negação pode ser reescrita como

existe função contínua.

(c) Para encontrar a negação de

todos os números ímpares são primos,

podemos proceder do seguinte modo.

Primeiro, observamos que o enunciado envolve exatamente três propriedades:

ser número , ser ímpar , ser primo.

Assim, uma legenda para o enunciado pode ser:

$$\begin{array}{rcl} p(z) & : & z \text{ é número} \\ q(z) & : & z \text{ é ímpar} \\ r(z) & : & z \text{ é primo.} \end{array}$$

Como o enunciado afirma todo z que é simultaneamente número e ímpar também é primo, ele pode ser simbolizado como:

$$\forall z \langle [p(z) \wedge q(z)] \to r(z) \rangle.$$

Agora, para obter a negação do enunciado, aplicamos equivalências:

$$\neg \forall z((p(z) \wedge q(z)) \to r(z))$$

é equivalente a

$$\exists z \neg((p(z) \wedge q(z)) \to r(z))$$

é equivalente a

$$\exists x((p(z) \wedge q(z)) \wedge \neg r(z)).$$

Este último enunciado afirma que existe ao menos um z que satisfaz simultaneamente a propriedade $p(z) \wedge q(z)$, ou seja, é número ímpar, e a propriedade $\neg r(z)$, ou seja, não é primo. Assim, o enunciado afirma que

existem números ímpares que não são primos

e a negação pode ser reescrita como

existem números ímpares que são compostos.

4.1 Observações

Observação 4 Os itens (b) e (c) do Exemplo 6 seguem a tendência bastante comum de, na Linguagem Matemática, encontrarmos o quantificador

para todo

aplicado a implicações. Mas lembre-se que — como dissemos na Observação 5.1.5 do texto da Semana 5, Parte 2 — não é verdade que as únicas ocorrências do para todo sejam em generalizações de implicações. Por exemplo, as frases

todos são quadrados perfeitos e positivos
cada um é feliz ou não,

que são generalizações de uma conjunção e de uma disjunção, respectivamente, também são exemplos perfeitamente legítimos de enunciados.

4.2 Exercícios resolvidos

Exercício 5 Para cada enunciado abaixo, (a) determine uma legenda, (b) simbolize o enunciado, de acordo com a legenda definida, (c) reescreva a negação do enunciado, usando equivalências.

(i) todos estão vivos
(ii) todos são imperfeitos
(iii) todos os ímpares são primos
(iv) todos os que estão insatisfeitos são infelizes
(v) qualquer um tem pai e mãe
(vi) cada quadrado tem quatro lados
(vii) todos estão positivos ou operantes
(viii) cada um é feliz ou não

Exercício 6 Para cada enunciado abaixo, (a) determine uma legenda, (b) simbolize o enunciado, de acordo com a legenda definida, (c) reescreva a negação do enunciado, usando equivalências.

(i) não existe número racional entre 0 e 1
(ii) todo número ímpar é primo
(iii) todo número inteiro que é múltiplo de 2 e de 3 também é múltiplo de 8
(iv) todo polígono tem três ou quatro lados
(v) todo número primo ímpar é divisível por 3 e por 5

Antes de ler as resoluções, tente resolver os exercícios usando os conceitos estudados.

***Resolução do Exercício 5*:** (i) Propriedade: estar vivo. Legenda: $v(x)$: x está vivo. Afirma que todo x está vivo. Simbolização: $\forall x(v(x))$. Negação: $\neg\forall x(v(x))$ é equivalente a $\exists x\neg(v(x))$. Afirma que existe x que não está vivo. Reescrita: alguém está morto. Para o item (ii) Propriedade: ser perfeito. Legenda: $p(x)$: x é perfeito. Afirma que todo x não é perfeito. Simbolização: $\forall x(\neg p(x))$. Negação: $\neg\forall x(\neg p(x))$ é equivalente a $\exists x(\neg\neg p(x))$ é equivalente a $\exists x(p(x))$. Afirma que algum x é perfeito. Reescrita: alguém é perfeito. (iii) Propriedades: ser ímpar e ser primo. Legenda: $i(x)$: x é ímpar; $p(x)$: x é primo. Afirma que todo x que é ímpar, também é primo. Simbolização: $\forall x(i(x) \to p(x))$. Negação: $\neg\forall x(i(x) \to p(x))$ é equivalente a $\exists x\neg(i(x) \to p(x))$ é equivalente a $\exists x(i(x) \wedge \neg p(x))$. Afirma que existe x que é ímpar e que não é primo. Reescritas: existem ímpares que não são primos, algum par não é primo e há pares que são compostos. (iv) Propriedades: estar satisfeito e ser feliz. Legenda: $s(x)$: x está satisfeito; $f(x)$: x é feliz. Afirma que todo x que está satisfeito também está feliz. Simbolização: $\forall x(\neg s(x) \to \neg f(x))$. Negação: $\neg\forall x(\neg s(x) \to \neg f(x))$ é equivalente a $\exists x\neg(\neg s(x) \to \neg f(x))$ é equivalente a $\exists x(\neg s(x) \wedge \neg\neg f(x))$ é equivalente a $\exists x(\neg s(x) \wedge f(x))$. Afirma que existe x que está insatisfeito, mas está feliz. Reescrita: existe ao menos um insatisfeito feliz. (v) Propriedades: ter pai e ter mãe. Legenda: $p(x)$: x tem pai; $m(x)$: x tem mãe. Afirma que todo x tem pai e tem mãe. Simbolização: $\forall x(p(x) \wedge m(x))$. Negação: $\neg\forall x(p(x) \wedge m(x))]$ é equivalente a $\exists x\neg(p(x) \wedge m(x))$ é equivalente a $\exists x(\neg p(x) \vee \neg m(x))$. Afirma que existe x que não tem pai ou não tem mãe. Reescrita: alguém não tem pai ou não tem mãe. (vi) Propriedades: ser quadrado e ter quatro lados. Legenda: $q(x)$: x é quadrado; $l(x)$: x tem quatro lados. Afirma que todo x é quadrado tem quatro lados. Simbolização: $\forall x(q(x) \to l(x))$. Negação: $\neg\forall x(q(x) \to l(x))$ é equivalente a $\exists x\neg(q(x) \to l(x))$ é equivalente a $\exists x(q(x) \wedge \neg l(x))$. Afirma que existe x que é quadrado e não tem quatro lados. Reescrita: existe quadrado que não tem quatro lados. (vii) Propriedades: estar positivo e estar operante. Legenda: $p(x)$: x está positivo; $o(x)$: x está operante. Afirma que todo x está positivo ou está operante. Simbolização:

$$\forall x(p(x) \vee o(x))$$

Negação: $\neg\forall x(p(x) \vee o(x))$ é equivalente a $\exists x\neg(p(x) \vee o(x))$ é equivalente a $\exists x(\neg p(x) \wedge \neg o(x))$. Afirma que existe x que não está positivo e não está operante. Reescrita: alguém não está nem positivo nem operante. (viii) Propriedade: ser feliz. Legenda: $f(x)$: x é feliz Afirma que todo$x$ é feliz ou n ao é feliz. Simbolização: $\forall x(f(x) \vee \neg f(x))$. Negação: $\neg\forall x(f(x) \vee \neg f(x))$ é equivalente a $\exists x\neg(f(x) \vee \neg f(x))$ é equivalente a $\exists x(\neg f(x) \wedge \neg\neg f(x))$ é equivalente a $\exists x(\neg f(x) \wedge f(x))$. Afirma que existe x que não é feliz e é feliz. Reescrita: alguém é infeliz e feliz. ***Resolução do Exercício 6*:** (i) Pode ser reescrito como não (existe número racional entre 0 e 1). É uma negação. Assim, sua negação é existe número racional entre 0 e 1. (ii) Propriedades: ser número, ser ímpar e ser primo. Legenda: $n(x)$: x é número; $i(x)$: x é ímpar; $p(x)$: x é primo. Afirma que todo x que é número e ímpar, também é primo. Simbolização: $\forall x[(n(x) \wedge i(x)) \to p(x)]$. Negação: $\neg\forall x[(n(x) \wedge i(x)) \to p(x)]$ é equivalente a $\exists x\neg[(n(x) \wedge i(x)) \to p(x))]$ é equivalente a $\exists x[(n(x) \wedge i(x)) \wedge \neg p(x)]$. Afirma que existe x que é número e ímpar, e não é primo. Reescrita: existe número ímpar que não é primo, ou seja, existe número ímpar que é composto, (iii) Propriedades: ser número, ser inteiro, ser múltiplo de 2, ser múltiplo de 3 e ser múltiplo de 8. Legenda: $p(x)$: x é número; $q(x)$: x é inteiro; $r(x)$: x é múltiplo de 2; $s(x)$: x é múltiplo de 3; $t(x)$: x múltiplo de 8. Simbolização: $\forall x[(p(x) \wedge q(x) \wedge r(x) \wedge s(x)) \to t(x)]$. Observe que pela associatividade do $\wedge$, podemos suprimir parênteses em $p(x) \wedge q(x) \wedge r(x) \wedge s(x)$. Negação: $\neg\forall x[(p(x) \wedge q(x) \wedge r(x) \wedge s(x)) \to t(x)]$ é equivalente a $\exists x \neg[(p(x) \wedge q(x) \wedge r(x) \wedge s(x)) \to t(x)]$ é equivalente a $\exists x(((p(x) \wedge q(x) \wedge r(x) \wedge s(x)) \wedge \neg t(x))$. Reescita: existe número inteiro que é múltiplo de 2 e de 3 mas não é múltiplo de 8. (iv) Você deve chegar a um enunciado simbolizado que pode ser rescrito como: existem polígonos que não têm três e não têm quatro lados. Observe que, de acordo com a prática matemática, "existem polígonos" é lido como "existe ao menos um polígono". (v) Você deve chegar a um enunciado simbolizado que pode ser reescrito como: existe número primo ímpar que não é divisível por 3 ou não é divisível por 5.
