Lógica dos Quantificadores: refutação

Renata de Freitas *e* Petrucio Viana

IME, UFF

15 de junho de 2015

Sumário

Parte 1

Refutação para LQ

Refutação para LQ

Já sabemos aplicar o Método das Árvores de Refutação em LC para resolver os problemas lógicos usuais:

- equivalência;
- satisfabilidade/consistência;
- validade/consequência semântica.

Vamos agora estender este método para resolver os problemas análogos em LQ.

Refutação para LQ

Como já sabemos, os 5 problemas usuais são computacionalmente equivalentes.

Assim, vamos desenvolver o método para o Problema da Validade de Fórmulas e aplicá-lo diretamente na resolução dos outros problemas.

Parte 2

Redução ao absurdo e refutação

Redução ao absurdo e refutação

Intuitivamente, uma fórmula de LQ é válida se não existe um contexto no qual ela é falsa.

Ou seja, se não existe uma *interpretação* na qual ela é falsa.

Ou seja, não existe um domínio de quantificação e uma atribuição de significados às propriedades e relações que ocorrem na fórmula, neste domínio, de maneira que a fórmula seja V.

Redução ao absurdo e refutação

(1) Temos $\varphi \in \mathrm{FLQ}$ que julgamos ser uma válida.

(2) Para uma contradição, supomos que φ não é válida, ou seja, que existe uma interpretação na qual ela é F.

(3) Utilizando os conhecimentos fornecidos pelas regras de formação e avaliação de fórmulas, em conjunto com $I^*[\varphi] = F$, raciocinamos em busca de duas informações contraditórias.

Redução ao absurdo e refutação

(4) Aplicando o conteúdo expresso nas regras de avaliação, "de fora para dentro", a informação $I^*[\varphi] = F$ é usada para calcularmos os valores das subfórmulas de φ, as subfórmulas das subfórmulas de φ, ..., até os valores das fórmulas atômicas de φ.

(5) De acordo com RA, se $\models \varphi$, a informação obtida deve ser conflitante. Este conflito deve ser expresso na existência de uma subfórmula φ, tal que $I^*[\varphi] = V$ e $I^*[\varphi] = F$.

Parte 3

Regras de refutação para os quantificadores

Regras de refutação para os quantificadores

A aplicação do Método de Refutação para decidir se uma fórmula é válida tem, sempre, a mesma estrutura geral, independente da fórmula em questão:

1. Assuma $\varphi : F$.
2. Calcule sucessivamente os valores das subfórmulas das subfórmulas $\ldots$ das subfórmulas de φ.
3. Obtenha os valores das subfórmulas.
3. Verifique se há alguma atribuição de valores contraditória.

Exemplo 1

$\models \forall x P(x) \rightarrow P(a)$?

Assumimos que $\forall x P(x) \rightarrow P(a)$ é F:

$$\forall x P(x) \rightarrow P(a) : F$$

Exemplo 1

$\models \forall x P(x) \rightarrow P(a)$?

Temos, então, que $\forall x P(x)$ é V e $P(a)$ é F:

$$\forall x P(x) \rightarrow P(a) : F$$
$$\forall x P(x) : V$$
$$P(a) : F$$

Exemplo 1

$\models \forall x P(x) \to P(a)$?

Marcamos a informação que já foi utilizada:

$$\begin{array}{c} \forall x P(x) \to P(a) : F \ \surd \\ \forall x P(x) : V \\ P(a) : F \end{array}$$

Exemplo 1

$\models \forall x P(x) \rightarrow P(a)$?

Como $\forall x P(x)$ é V e a é o nome de um elemento do domínio, temos que $P(a)$ é V:

$$\begin{array}{c} \forall x P(x) \rightarrow P(a) : F \ \surd \\ \forall x P(x) : V \\ P(a) : F \\ P(a) : V \end{array}$$

Exemplo 1

$\models \forall x P(x) \rightarrow P(a)$?

Não marcamos a informação, porque ela pode ser novamente utilizada.

$$\begin{array}{c} \forall x P(x) \rightarrow P(a) : F \ \surd \\ \forall x P(x) : V \\ P(a) : F \\ P(a) : V \end{array}$$

Exemplo 1

$\models \forall x P(x) \rightarrow P(a)$?

Examinamos a estrutura e marcamos as contradições:

$$\begin{array}{c} \forall x P(x) \rightarrow P(a) : F \ \surd \\ \forall x P(x) : V \\ P(a) : F \\ P(a) : V \\ \times \end{array}$$

Exemplo 2

$\models \forall x P(x) \rightarrow \exists x P(x)$?

Assumimos que $\forall x P(x) \rightarrow \exists x P(x)$ é F:

$$\forall x P(x) \rightarrow \exists x P(x) : F$$

Exemplo 2

$\models \forall x P(x) \rightarrow \exists x P(x)$?

Temos, então, que $\forall x P(x)$ é V e $\exists x P(x)$ é F:

$$\begin{gathered} \forall x P(x) \rightarrow \exists x P(x) : F \\ \forall x P(x) : V \\ \exists x P(x) : F \end{gathered}$$

Exemplo 2

$\models \forall x P(x) \rightarrow \exists x P(x)$?

Marcamos a informação que já foi utilizada:

$$\begin{gathered} \forall x P(x) \rightarrow \exists x P(x) : F \ \surd \\ \forall x P(x) : V \\ \exists x P(x) : F \end{gathered}$$

Exemplo 2

$\models \forall x P(x) \rightarrow \exists x P(x)$?

Como $\forall x P(x)$ é V mas nenhuma constante ocorre na árvore (ainda), introduzimos uma constante nova, a, e então temos que $P(a)$ é V:

$$\begin{array}{c} \forall x P(x) \rightarrow \exists x P(x) : F \ \surd \\ \forall x P(x) : V \\ \exists x P(x) : F \\ P(a) : V \end{array}$$

Exemplo 2

$\models \forall x P(x) \rightarrow \exists x P(x)$?

Não marcamos a informação, porque ela pode ser novamente utilizada.

$$
\begin{array}{c}
\forall x P(x) \rightarrow \exists x P(x) : F \ \surd \\
\forall x P(x) : V \\
\exists x P(x) : F \\
P(a) : V
\end{array}
$$

Exemplo 2

$\models \forall x P(x) \to \exists x P(x)$?

Como $\exists x P(x)$ é F e a é o nome de um elemento do domínio, temos que $P(a)$ é F:

$$\begin{gathered}\forall x P(x) \to \exists x P(x) : F \ \surd \\ \forall x P(x) : V \\ \exists x P(x) : F \\ P(a) : V \\ P(a) : F\end{gathered}$$

Exemplo 2

$\models \forall x P(x) \to \exists x P(x)$?

Mais uma vez, não marcamos a informação, porque ela pode ser novamente utilizada.

$$\begin{array}{c} \forall x P(x) \to \exists x P(x) : F \ \surd \\ \forall x P(x) : V \\ \exists x P(x) : F \\ P(a) : V \\ P(a) : F \end{array}$$

Exemplo 2

$\models \forall x P(x) \to \exists x P(x)$?

Examinamos a estrutura e marcamos as contradições:

$$\begin{array}{c} \forall x P(x) \to \exists x P(x) : F \ \checkmark \\ \forall x P(x) : V \\ \exists x P(x) : F \\ P(a) : V \\ P(a) : F \\ \times \end{array}$$

Exemplo 3

$\models \exists x P(x) \rightarrow P(a)$?

Assumimos que $\exists x P(x) \rightarrow P(a)$ é F:

$$\exists x P(x) \rightarrow P(a) : F$$

Exemplo 3

$\models \exists x P(x) \rightarrow P(a)$?

Temos, então, que $\exists x P(x)$ é V e $P(a)$ é F:

$$\exists x P(x) \rightarrow P(a) : F$$
$$\exists x P(x) : V$$
$$P(a) : F$$

Exemplo 3

$\models \exists x P(x) \rightarrow P(a)$?

Marcamos a informação que já foi utilizada:

$$\begin{array}{c} \exists x P(x) \rightarrow P(a) : F \ \surd \\ \exists x P(x) : V \\ P(a) : F \end{array}$$

Exemplo 3

$\models \exists x P(x) \rightarrow P(a)$?

Como $\exists x P(x)$ é V, escolhemos uma constante nova, b, para nomear o elemento do domínio tal que $P(b)$ é V.

$$\begin{array}{c} \exists x P(x) \rightarrow P(a) : F \ \surd \\ \exists x P(x) : V \\ P(a) : F \\ P(b) : V \end{array}$$

Exemplo 3

$\models \exists x P(x) \rightarrow P(a)$?

Marcamos a informação já utilizada:

$$\begin{array}{c} \exists x P(x) \rightarrow P(a) : F \ \surd \\ \exists x P(x) : V \ \surd \\ P(a) : F \\ P(b) : V \end{array}$$

Exemplo 3

$\models \exists x P(x) \rightarrow P(a)$?

Como todas as fórmulas moleculares esto marcadas com $\surd$ e, examinando a estrutura, não encontramos contradições, marcamos o ramo com $\downarrow$:

$$\begin{array}{c} \exists x P(x) \rightarrow P(a) : F \ ^{\surd} \\ \exists x P(x) : V \ ^{\surd} \\ P(a) : F \\ P(b) : V \\ \downarrow \end{array}$$

Exemplo 4

$\models P(a) \rightarrow \exists x P(x)$?

Assumimos que $P(a) \rightarrow \exists x P(x)$ é F:

$$P(a) \rightarrow \exists x P(x) : F$$

Exemplo 4

$\models P(a) \rightarrow \exists x P(x)$?

Temos, então, que $P(a)$ é V e $\exists x P(x)$ é F:

$$\begin{gathered} P(a) \rightarrow \exists x P(x) : F \\ P(a) : V \\ \exists x P(x) : F \end{gathered}$$

Exemplo 4

$\models P(a) \rightarrow \exists x P(x)$?

Marcamos a informação que já foi utilizada:

$$
\begin{array}{c}
P(a) \rightarrow \exists x P(x) : F \ \surd \\
P(a) : V \\
\exists x P(x) : F
\end{array}
$$

Exemplo 4

$\models P(a) \rightarrow \exists x P(x)$?

Como $\exists x P(x)$ é F, não existe um elemento no domínio que possua a propriedade P. Como a é o nome de um elemento do domínio, $P(a)$ é F.

$$\begin{array}{c} P(a) \rightarrow \exists x P(x) : F \ \surd \\ P(a) : V \\ \exists x P(x) : F \\ P(a) : F \end{array}$$

Exemplo 4

$\models P(a) \to \exists x P(x)$?

Não marcamos a informação, pois ela pode ser novamente utilizada:

$$\begin{array}{c} P(a) \to \exists x P(x) : F \;\checkmark \\ P(a) : V \\ \exists x P(x) : F \\ P(a) : F \end{array}$$

Exemplo 4

$\models P(a) \to \exists x P(x)$?

Examinamos a estrutura e marcamos as contradições:

$$\begin{array}{c} P(a) \to \exists x P(x) : F \ \checkmark \\ P(a) : V \\ \exists x P(x) : F \\ P(a) : F \\ \times \end{array}$$

Parte 4

Árvores de refutação de LQ

Inicialização

Seja $\varphi \in$ FLQ.

Uma árvore de refutação para $\varphi : F$, denotada $A[\varphi : F]$, é definida por aplicação sucessiva das seguintes regras de refutação.

Regra de inicialização

Iniciamos a construção da árvore escrevendo $\varphi : F$.

Diagramaticamente, temos:

$$\varphi : F$$

Regra do $\forall : V$

$$\forall v \varphi \text{ é } V \text{ se, e somente se, } \varphi_v^c \text{ é } V,$$
$$\text{para todos os elementos } c \text{ do domínio}$$

Assim, se temos uma ocorrência de $\forall v \varphi : V$ em algum ramo do diagrama construído até o momento, expandimos este ramo acrescentando o seguinte diagrama a todas as suas bifurcações:

$$\begin{array}{c} | \\ \varphi_v^{c_1} : V \\ \varphi_v^{c_2} : V \\ \vdots \\ \varphi_v^{c_n} : V \end{array}$$

onde c_i é uma constante que (já) ocorre no ramo tal que $\varphi_v^{c_i} : V$ não ocorre no ramo ($i = 1, 2, \ldots, n$). Não marcamos $\forall v \varphi : V$.

Regra do $\forall : V$

Diagramaticamente, temos:

$$
\begin{array}{c}
\vdots \\
\forall v \varphi : V \\
\vdots \\
| \\
\varphi_v^{c_1} : V \\
\varphi_v^{c_2} : V \\
\vdots \\
\varphi_v^{c_n} : V
\end{array}
$$

Regra do $\forall : F$

$\forall v\varphi$ é F se, e somente se, φ_v^c é F,
para algum o elemento c do domínio

Assim, se temos uma ocorrência de $\forall v\varphi : F$ ainda não marcada em algum do diagrama construído até o momento, marcamos $\forall v\varphi : F$ e expandimos este ramo acrescentando o seguinte diagrama a todas as suas bifurcações:

$$\begin{array}{c} | \\ \varphi_v^c : F \end{array}$$

onde c é uma constante "nova, isto é, que (ainda) não ocorre no ramo.

Regra do $\forall : F$

Diagramaticamente, temos:

$$
\begin{array}{c}
\vdots \\
\forall v \varphi : F \qquad \checkmark \\
\vdots \\
| \\
\varphi^{c}_{v} : F
\end{array}
$$

Regra do $\exists : V$

$\exists v \varphi$ é V se, e somente se, φ^c_v é V,
para algum o elemento c do domínio

Assim, se temos uma ocorrência de $\exists v \varphi : V$ ainda não marcada em algum do diagrama construído até o momento, marcamos $\exists v \varphi : V$ e expandimos este ramo acrescentando o seguinte diagrama a todas as suas bifurcações:

$$\begin{array}{c} | \\ \varphi^c_v : V \end{array}$$

onde c é uma constante "nova, isto é, que (ainda) não ocorre no ramo.

Regra do $\exists : F$

Diagramaticamente, temos:

$$
\begin{array}{cc}
\vdots & \\
\exists v \varphi : V & \checkmark \\
\vdots & \\
| & \\
\varphi_v^{c} : V &
\end{array}
$$

Regra do $\exists : F$

$\exists v\varphi$ é F se, e somente se, φ_v^c é F,
para todos os elementos c do domínio

Assim, se temos uma ocorrência de $\exists v\varphi : F$ em algum ramo do diagrama construído até o momento, expandimos este ramo acrescentando o seguinte diagrama a todas as suas bifurcações:

$$
\begin{array}{c}
| \\
\varphi_v^{c_1} : F \\
\varphi_v^{c_2} : F \\
\vdots \\
\varphi_v^{c_n} : F
\end{array}
$$

onde c_i é uma constante que (já) ocorre no ramo tal que $\varphi_v^{c_i} : F$ não ocorre no ramo ($i = 1, 2, \ldots, n$). Não marcamos $\exists v\varphi : F$.

Regra do $\exists : F$

Diagramatically, temos:

$$
\begin{array}{c}
\vdots \\
\exists v \varphi : F \\
\vdots \\
| \\
\varphi_v^{c_1} : F \\
\varphi_v^{c_2} : F \\
\vdots \\
\varphi_v^{c_n} : F
\end{array}
$$

Regra de saturação

Uma fórmula $\forall v \varphi : V$ (respec. $\exists v \varphi : F$) é considerada marcada se, para toda constante c, se c ocorre em um dos ramos aos quais a fórmula pertence, então $\varphi_v^c : V$ (respec. $\varphi_v^c : F$) também ocorre no ramo.

Uma árvore já construída é saturada se todas as fórmulas moleculares que ocorrem nela estão marcadas.

Aplique as regras acima (em alguma ordem, de maneira controlada) até que a árvore esteja saturada.

A árvore saturada obtida é $A[\varphi : F]$.

Ramo fechado e ramo aberto

Seja $\varphi \in$ FLQ, $A[\varphi : F]$ uma árvore de refutação para $\varphi : F$ e R um ramo de $A[\varphi : F]$.

(1) R é fechado se existem uma fórmula atômica θ e nós n_1 e n_2 em R tais que n_1 é $\theta : V$ e n_2 é $\theta : F$.

(2) R é aberto se não é fechado.

Método das Árvores de Refutação de LQ

Objetivo: Dada uma fórmula φ de LQ, determinar se $\models \varphi$.

Método: Consiste dos seguintes passos:

1. Construir uma árvore de refutação (saturada) $A[\varphi : F]$;
2. Examinar todos os ramos de $A[\varphi : F]$.
3. Se todos os ramos de $A[\varphi : F]$ estão fechados, então concluir que $\models \varphi$, se não, concluir que $\not\models \varphi$.

Parte 5

Resultados fundamentais

Resultado positivo

Árvores de refutação são o resultado de um trabalho empreendido ao longo dos anos pelos lógicos C.L. Dodgson (ou Lewis Carroll) (1832-1898), E.W. Beth (1908-1964), R.M Smullyan (1919- –) e K.J.J. Hintikka (1929- –).

Do ponto de vista matemático, o seguinte resultado garante que as árvores de refutação para LQ cumprem o papel para o qual foram projetadas.

Teorema (Smullyan, 1968)
Se $\varphi \in$ FLQ, então as seguintes condições são equivalentes:

(1) $\models \varphi$.

(2) Existe uma árvore de refutação fechada para $\varphi : F$.

Resultado negativo

Do ponto de vista computacional, o seguinte resultado mostra que as árvores de refutação para LQ não cumprem o papel para o qual foram projetadas.

Teorema (Corolário dos resultados de Church, 1936 e Turing, 1936/37)
Existe um conjunto não computável de fórmulas $\varphi \in$ FLQ, tais que:

(1) Se $\models \varphi$, então o Método de Refutação *pára* com uma árvore fechada, quando iniciado com $\varphi : F$.

(2) Se $\not\models \varphi$, então o Método de Refutação entra em *loop*, quando iniciado com $\varphi : F$.

Parte 6

Exercícios

Exercícios

Utilizando o Método das Árvores de Refutação, verifique se:

(i) $\models \forall x(P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\forall x P(x) \vee \forall x Q(x))$

(ii) $\models \exists x(P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow (\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x))$

(iii) $\models \forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (\forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x))$

(iv) $\models \exists x(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (\exists x P(x) \rightarrow \exists x Q(x))$

(v) $\forall x P(x) \models\!\!\!=\!\!\!\dashv \neg\exists x \neg P(x)$

(vi) $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \models\!\!\!=\!\!\!\dashv \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$

(vii) $\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \models\!\!\!=\!\!\!\dashv \exists x P(x) \wedge \forall x Q(x)$

(viii) $\exists x P(x), \exists x Q(x) \models \exists x(P(x) \wedge Q(x))$

(ix) $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)), \exists x \neg Q(x) \models \exists x \neg P(x)$

Mais exercícios

1. Ler o texto da Aula 23.

2. Resolver os exercícios da Lista 23.