Notas de aula de *Lógica para Ciência da Computação*

Aula 17, 2014/2

Renata de Freitas e *Petrucio Viana*
Departamento de Análise, IME–UFF

13 de novembro de 2014

Sumário

1 Regras de refutação de LQ **1**

2 Exercícios **3**

1 Regras de refutação de LQ

As *árvores de refutação* de LQ são formadas por aplicação sucessiva das regras de refutação de LC acrescidas das seguintes regras.

Regra da quantificação universal

1. Como $\forall x\varphi$ é V se, e somente se, todos os elementos do domínio possuem a propriedade expressa pelo enunciado φ, quando temos $\forall x\varphi : V$ em um ramo da árvore, expandimos este ramo acrescentando a todas as suas bifurcações o diagrama:

$$\begin{array}{c} | \\ \varphi\frac{c}{x} : V \end{array}$$

para cada constante c que já ocorre em alguma sentença no ramo. Quando o ramo não possui ocorrências de constantes em nenhuma de suas sentenças, escolhemos uma constante c nova, isto é, que ainda não ocorre no ramo. Não marcamos $\forall x\varphi : V$ como usada pois, quando uma sentença com uma ocorrência de uma nova constante c' for acrescentada ao ramo pela aplicação de alguma regra de refutação, expandimos o ramo acrescentando a todas as suas bifurcações o diagrama:

$$\begin{array}{c} | \\ \varphi\frac{c'}{x} : V \end{array}$$

Marcamos $\forall x\varphi : V$ indicando para que constantes fizemos a expansão.

Em resumo:

$$\begin{array}{cl} \vdots & \\ \forall x\varphi : V^{\ c} & \\ \vdots & \textit{para toda constante c que já ocorre no ramo} \\ | & \\ \varphi\frac{c}{x} : V & \end{array}$$

2. Como $\forall x\varphi$ é F se, e somente se, algum elemento do domínio não possui a propriedade expressa pelo enunciado φ, quando temos $\forall x\varphi : F$ em um ramo da árvore, marcamos $\forall x\varphi : F$ como usada e expandimos este ramo acrescentando a todas as suas bifurcações o diagrama:

$$\begin{array}{c} | \\ \varphi\frac{c}{x} : F \end{array}$$

para uma constante c que ainda não ocorre nas sentenças do ramo.

Em resumo:

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \forall x\varphi : F \ \checkmark \\ \vdots \\ | \\ \varphi\frac{c}{x} : F \end{array} \qquad \textit{para uma constante c nova no ramo}$$

Regra da quantificação existencial

1. Como $\exists x\varphi$ é V se, e somente se, algum elemento do domínio possui a propriedade expressa pelo enunciado φ, quando temos $\exists x\varphi : V$ em um ramo da árvore, marcamos $\exists x\varphi : V$ como usada e expandimos este ramo acrescentando a todas as suas bifurcações o diagrama:

$$\begin{array}{c} | \\ \varphi\frac{c}{x} : V \end{array}$$

para uma constante c que ainda não ocorre nas sentenças do ramo.

Em resumo:

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \exists x\varphi : V \ \checkmark \\ \vdots \\ | \\ \varphi\frac{c}{x} : V \end{array} \qquad \textit{para uma constante c nova no ramo}$$

2. Como $\exists x\varphi$ é F se, e somente se, nenhum elemento do domínio possui a propriedade expressa pelo enunciado φ, quando temos $\exists x\varphi : F$ em um ramo da árvore, expandimos este ramo acrescentando a todas as suas bifurcações o diagrama:

$$\begin{array}{c} | \\ \varphi\frac{c}{x} : F \end{array}$$

para cada constante c que já ocorre em alguma sentença no ramo. Quando o ramo não possui ocorrências de constantes em nenhuma de suas sentenças, escolhemos uma constante c nova, isto é, que ainda não ocorre no ramo. Não marcamos $\exists x\varphi : F$ como usada pois, quando uma sentença com uma ocorrência de uma nova constante c' for acrescentada ao ramo pela aplicação de alguma regra de refutação, expandimos o ramo acrescentando a todas as suas bifurcações o diagrama:

$$\begin{array}{c} | \\ \varphi\frac{c'}{x} : F \end{array}$$

Marcamos $\forall x\varphi : V$ indicando para que constantes fizemos a expansão.

Em resumo:

$$
\begin{array}{c}
\vdots \\
\exists x\varphi : F^{\ c} \\
\vdots \\
| \\
\varphi\frac{c}{x} : F
\end{array}
\qquad \textit{para toda constante c que já ocorre no ramo}
$$

Definição 1.1 Seja A uma árvore e R um ramo de A.

i) R é *fechado* se existem nós a e b em R tais que a é $\varphi : V$ e b é $\varphi : F$, para alguma sentença atômica φ.

ii) R é *aberto* se não é fechado.

MÉTODO DAS ÁRVORES DE REFUTAÇÃO DE LQ

Objetivo: Dada uma sentença simbolizada φ de LQ, determinar se $\models \varphi$.

Método: Consiste dos seguintes passos:

PASSO 1) Criar uma árvore com um único nó $\varphi : F$.

PASSO 2) Escolher na árvore um nó ainda não marcado como usado de um ramo ainda aberto e aplicar a este nó a regra de refutação correspondente.

PASSO 3) Examinar todos os ramos da árvore.

- Se todos os ramos estão fechados ou as únicas sentenças não marcadas como usadas são atômicas ou quantificações universais V ou quantificações existenciais F para as quais a expansão com todas as constantes que ocorrem no ramo já foi feita, então vá para o Passo 4.
- Se existe um ramo aberto, vá para Passo 2.

PASSO 4) Se todos os ramos estão fechados, conclua $\models \varphi$.

Este método pode ser aplicado na verificação da validade de argumentos de LQ. De fato, dado um argumento:

$$\frac{\varphi_1 \cdots \varphi_n}{\psi}$$

sabemos que:

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \psi \text{ se, e somente se, } \models \varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \to \psi$$

Assim, basta aplicar o método à sentença $\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \to \psi$.

Teorema 1.1 (Smullyan, 1968) *Seja φ uma sentença simbolizada de LQ. Se existir uma árvore de refutação fechada para φ, então $\models \varphi$.*

O método das árvores de refutação para LQ é um método de decisão. Para qualquer fórmula φ de LQ, φ é válida se, e somente se, é possível construir uma árvore de refutação fechada para φ.

2 Exercícios

1. Verifique a validade dos seguintes argumentos:

(a)
$$\begin{array}{l} \forall x P(x) \to \forall x Q(x) \\ \neg \forall x Q(x) \\ \hline \neg \forall x P(x) \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{l} \forall x (P(x) \to Q(x)) \\ \forall x P(x) \\ \hline Q(a) \end{array}$$

(c) $\dfrac{\begin{array}{l} P(a) \to Q(b) \\ \forall x \neg P(x) \end{array}}{\neg Q(b)}$

(d) $\dfrac{\begin{array}{l} \forall x (P(x) \to Q(x)) \\ \forall x Q(x) \end{array}}{P(a)}$

(e) $\dfrac{\begin{array}{l} \forall x (P(x) \to Q(x)) \\ \neg \exists x Q(x) \end{array}}{\neg P(a)}$

(f) $\dfrac{\neg \exists x (P(x) \wedge Q(x))}{\neg P(a)}$

(g) $\dfrac{\begin{array}{l} \forall x P(x) \to \forall x Q(x) \\ \neg \exists x Q(x) \end{array}}{\exists x \neg P(x)}$

(h) $\dfrac{\exists x P(x)}{\forall x P(x)}$

(i) $\dfrac{\exists x (P(x) \wedge Q(x))}{\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)}$

(j) $\dfrac{\begin{array}{l} \exists x P(x) \\ \exists x Q(x) \end{array}}{\exists x (P(x) \wedge Q(x))}$