

Notas de aula de *Lógica para Ciência da Computação*

Aula 2, 2014/2

Sintaxe da Lógica dos Conectivos

Renata de Freitas e Petrucio Viana
Departamento de Análise, IME–UFF

27 de agosto de 2014

Sumário

1	Sintaxe e semântica	1
2	Sintaxe de LC	2
2.1	Alfabeto de LC	2
2.2	Expressões de LC	3
2.3	Fórmulas de LC	4
3	Recursão em fórmulas	7
4	Indução em fórmulas	10
5	Exercícios	13

1 Sintaxe e semântica

As ideias relacionadas a conjuntos indutivos parecem ser tão antigas quanto a humanidade.

Exemplo 1.1 No Antigo Testamento há um relato que, com um pouco de imaginação e humor, pode ser visto como uma explicação de que Deus definiu a humanidade por este processo.

De fato, no Texto Sagrado está escrito que Deus criou Adão e Eva (a base) e que a Serpente fez com que eles tivessem ciência de que andavam nus. A partir daí, foram expulsos do Paraíso e descobriram o sexo (procedimento), que, desde então, é aplicado para gerar toda a humanidade a partir de Adão e Eva. . .

Brincadeiras a parte, agora que tivemos um primeiro contato com as definições e provas por indução e recursão, vamos aplicar estas noções no estudo dos sistemas lógicos.

Como já mencionamos, nesta disciplina vamos estudar os dois sistemas lógicos mais básicos: a Lógica dos Conectivos, LC, e a Lógica dos Quantificadores, LQ. Além disso, como já dissemos, também, todo sistema lógico consiste de duas partes principais: linguagem e mecanismo de inferência. Assim, deste ponto em diante, um de nossos principais objetivos, é apresentar em detalhes, tanto para LC quanto para LQ, (ao menos) uma linguagem formal e (ao menos) um mecanismo de inferência.

Em ambos os casos, a descrição da linguagem formal será feita em duas etapas:

1. *sintaxe*: qual é o alfabeto da linguagem e como as palavras, frases e textos da linguagem são formados;
2. *semântica*: que significados podem ser atribuídos às letras do alfabeto, as palavras, frases e textos da linguagem.

Cada uma destas partes de cada sistema será descrita pormenorizadamente mais adiante. E nas descrições que faremos das sintaxes e semânticas dos sistemas, faremos uso essencial das definições indutivas, das definições recursivas e das provas por indução.

Como veremos, as sintaxes de LC e de LQ, exceto por algumas possíveis variantes notacionais supérfluas, são essencialmente únicas. Por outro lado, existem vários mecanismos de inferência para LC e para LQ. Dentre todos, os mais importantes, são:

1. *sistemas axiomáticos*;
2. *árvores de refutação*;
3. *método de dedução*;
4. *resolução*.

Todos estes mecanismos serão descritos e analisados mais adiante. Novamente, muito do que será feito, terá como alicerce os métodos de definição e prova por indução e recursão.

2 Sintaxe de LC

Nesta aula e na próxima, nos dedicaremos ao estudo da sintaxe e da semântica da linguagem da LC.

2.1 Alfabeto de LC

A *sintaxe* de LC é a descrição formal das *letras*, *palavras*, *frases* e *textos* que compõem a linguagem da LC e é baseada nos seguintes princípios:

1. As sentenças são classificadas em *atômicas* ou *moleculares*.

As sentenças atômicas não possuem ocorrências de conectivos.

As sentenças moleculares são formadas a partir das sentenças atômicas pelo uso de *conectivos*.

2. Os únicos conectivos considerados são:

não é o caso que ... , ... e ... , ... ou ...
 se ... então ... , ... se, e somente se, ...

Estes são os conectivos mais utilizados em contextos matemáticos e computacionais.

Temos, então, a seguinte definição dos *símbolos* que compõem a linguagem de LC.

Definição 2.1 O *alfabeto* de LC consiste dos seguintes símbolos:

- *Variáveis para sentenças*: p , q , r , indexadas ou não.
- *Conectivos*: \neg , \wedge , \vee , \rightarrow , \leftrightarrow
- *Sinais de pontuação*: (,)

Assumimos que os símbolos acima são distintos dois a dois e que nenhum símbolo é uma sequência de outros símbolos. Isto ajuda a garantir a legibilidade única das palavras da linguagem.

O significado intuitivo das variáveis sentenciais são sentenças (atômicas) da Língua Portuguesa ou da Linguagem Matemática. A tabela abaixo mostra o nome de cada conectivo e também indica o significado intuitivo de cada um deles.

<i>conectivo</i>	<i>nome</i>	<i>significado</i>
\neg	símbolo de negação	não é o caso que
\wedge	símbolo de conjunção	e
\vee	símbolo de disjunção	ou (inclusivo)
\rightarrow	símbolo de implicação	se..., então
\leftrightarrow	símbolo de biimplicação	se, e somente se

Como veremos adiante, os significados informais dos símbolos expressos na tabela acima podem ser usados na elaboração de um procedimento para a tradução de sentenças da Língua Portuguesa e da Linguagem Matemática em LC.

2.2 Expressões de LC

Do ponto de vista puramente formal, com os símbolos do alfabeto podemos escrever *palavras*, que são sequências finitas de símbolos. Algumas fazem sentido, dado o significado intuitivo das variáveis e dos conectivos, outras não.

Exemplo 2.1 Por exemplo, considere os significados dos símbolos como acima.

1. Podemos escrever as expressões

$$p_1q_1r_1\neg\wedge()\left()\right) \quad \text{e} \quad (p_1(p_1\rightarrow p_2)p_2),$$

que não parece fazer nenhum sentido.

2. Podemos também escrever as expressões

$$\neg\neg p_1 \leftrightarrow p_1 \quad \text{e} \quad ((p_1 \wedge (p_1 \rightarrow p_2)) \rightarrow p_2).$$

A primeira parece expressar o fato de que, ao aplicarmos duas vezes o conectivo \neg a uma sentença, temos, na verdade, a sentença original. A outra parece expressar o fato de que, se temos a sentença p_1 e a sentença p_1 implica p_2 , então temos a sentença p_2 .

Exercício 2.1 Dado um alfabeto A , qualquer, uma *palavra sobre A* é uma sequência finita de símbolos de A .

A palavra cujos símbolos são $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n$, nesta ordem, é denotada por $s_1 s_2 s_3 \dots s_n$.

Por exemplo, se $A = \{a, b\}$, as seguintes são palavras sobre A : $a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, \dots$

Dado o alfabeto $B = \{a, b, c\}$, defina o conjunto das palavras sobre B por indução.

2.3 Fórmulas de LC

Vamos, agora, apresentar uma definição que seleciona, de uma maneira puramente sintática, isto é, sem fazer referências aos significados intuitivos dos símbolos, dentre todas as expressões possíveis de serem formadas com os símbolos do alfabeto de LC, aquelas que consideraremos como fazendo sentido. Ao formular esta definição, é claro, tomamos como guias os significados intuitivos das variáveis e dos conectivos, mas embora estes sejam usados de maneira essencial na formulação da definição, eles não são usados de forma nenhuma como critério para decidir se uma dada expressão é ou não aceita, de acordo com a definição.

Para definir as expressões que farão sentido, a seguir, utilizaremos uma definição de conjuntos por indução que será baseada nas seguintes ideias:

1. Um dos objetivos de LC é representar de maneira adequada algumas sentenças escritas em outras linguagens, como a Língua Portuguesa ou a Linguagem Matemática, por exemplo. Assim, as expressões que farão sentido, são definidas de modo a podermos representar sentenças como

2 é par.
2 e 3 são primos entre si.
João é perfeito.
João e Maria são primos.

2. Sentenças como as acima serão tomadas como elementos da base do conjunto indutivo das expressões que farão sentido.
3. Agora, uma vez definida a base, teremos um número limitado de maneiras de formarmos as outras expressões que farão parte do conjunto. Em particular, só admitiremos sentenças como

2 é par.
 2 e 3 são primos entre si.
 João é perfeito.
 João e Maria são primos.

que são formadas por aplicações iteradas das partículas \neg , \wedge , \vee , \rightarrow , \leftrightarrow , ou \forall , \exists , se, então, \rightarrow , se, e somente se.

O conjunto das fórmulas de LC é apresentado através de uma definição indutiva, como segue:

Definição 2.2 As fórmulas da Lógica dos Conectivos são obtidas por aplicação das seguintes regras:

1. Cada variável para sentença é uma fórmula.
2. Se φ é uma fórmula, então $(\neg\varphi)$ é uma fórmula.
3. Se φ e ψ são fórmulas, então $(\varphi \wedge \psi)$ é uma fórmula.
4. Se φ e ψ são fórmulas, então $(\varphi \vee \psi)$ é uma fórmula.
5. Se φ e ψ são fórmulas, então $(\varphi \rightarrow \psi)$ é uma fórmula.
6. Se φ e ψ são fórmulas, então $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ é uma fórmula.

Assumimos que nenhum objeto é uma fórmula a não ser que possa ser obtido por um número finito de aplicações das regras acima.

Sempre que apresentamos definições indutivas nas quais o procedimento é composto da aplicação de várias operações, procuramos agregar as operações que se aplicam ao mesmo número de objetos numa única regra. Deste modo, economizamos o espaço e, consequentemente, o tempo na redação da definição.

Exemplo 2.2 Uma forma perfeitamente legítima de apresentar a definição indutiva de fórmulas é a seguinte:

Definição 2.3 As fórmulas da Lógica dos Conectivos são obtidas por aplicação das seguintes regras:

1. Cada variável para sentença é uma fórmula.
2. Se φ é uma fórmula, então $(\neg\varphi)$ é uma fórmula.
3. Se φ e ψ são fórmulas, então $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$ e $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ são fórmulas.

Assumimos que nenhum objeto é uma fórmula a não ser que possa ser obtido por um número finito de aplicações das regras acima.

Vejamos, agora alguns exemplos de fórmulas, de acordo com as definições 2.2 e 2.3.

Exemplo 2.3 (a) São exemplos de fórmulas:

$$\begin{array}{c}
 p \quad , \quad q \quad , \quad r \\
 \hline
 (\neg p) \quad , \quad (\neg q) \\
 (p \wedge (\neg p)) \\
 ((\neg q) \rightarrow (p \wedge (\neg p))) \\
 (((\neg q) \rightarrow (p \wedge (\neg p))) \rightarrow q) \\
 \hline
 (p \vee q) \quad , \quad (p \rightarrow r) \quad , \quad (q \rightarrow r) \\
 ((p \vee q) \wedge (p \rightarrow r)) \\
 (((p \vee q) \wedge (p \rightarrow r)) \wedge (q \rightarrow r)) \\
 (((((p \vee q) \wedge (p \rightarrow r)) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow r)
 \end{array}$$

(b) Mas não são exemplos de fórmulas:

$$\begin{array}{c}
 \neg p \quad , \quad q\neg \quad , \quad pq \\
 \hline
 ((\neg p)) \quad , \quad p \wedge (\neg p) \\
 ((\neg q) \rightarrow (p \wedge \neg p)) \rightarrow (q)
 \end{array}$$

Algumas expressões listadas acima não são fórmulas “apenas” por possuírem ocorrências de parênteses em falta ou em excesso. Mais tarde, vamos introduzir algumas notações que nos permitirão relaxar sobre o uso de parênteses na escrita das fórmulas.

A seguinte nomenclatura é usualmente adotada no estudo das fórmulas.

Definição 2.4 Sejam φ e ψ fórmulas de LC. Dizemos que:

1. φ é *atômica* se é uma variável para sentenças.
2. φ é *molecular* se não é uma variável para sentenças.
3. $(\neg\varphi)$ é a *negação* de φ .

Dizemos também que φ é a *componente* da negação.

4. $(\varphi \wedge \psi)$ é a *conjunção* de φ com ψ .

Dizemos também que φ é a *primeira componente* e ψ é a *segunda componente* da conjunção.

5. $(\varphi \vee \psi)$ é a *disjunção* de φ com ψ .

Dizemos também que φ é a *primeira componente* e ψ é a *segunda componente* da disjunção.

6. $(\varphi \rightarrow \psi)$ é a *implicação* de ψ por φ (observe a ordem em que as fórmulas estão sendo referidas).

Dizemos também que φ é o *antecedente* e ψ é o *consequente* da implicação.

7. $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ é a *biimplicação* de φ com ψ .

Dizemos também que φ é a *primeira componente* e ψ é o *segunda componente* da biimplicação.

3 Recursão em fórmulas

A definição indutiva de fórmulas afirma explicitamente que nenhum objeto dado é uma fórmula a não ser que seja obtido por um número finito de aplicações das regras ali estipuladas. Ou seja:

Toda fórmula é *gerada* a partir das variáveis para sentenças por aplicação dos conectivos e as fórmulas são os únicos objetos obtidos por este processo.

Uma outra afirmação, mas desta vez implícita, que a definição indutiva de fórmulas também contém é a de que:

- os seis conjuntos de fórmulas contendo, respectivamente, as fórmulas atômicas, as negações, as conjunções, as disjunções, as implicações e as biimplicações são dois a dois disjuntos;

- dadas duas fórmulas genéricas φ e ψ , se sabemos que φ e ψ são iguais, podemos concluir que elas foram formadas a partir das mesmas variáveis para sentenças, da mesma maneira, por aplicação dos mesmos conectivos.

Ou seja:

A geração de cada fórmula é feita de um único modo a partir das variáveis para sentenças por aplicação iterada dos conectivos.

Estas propriedades em destaque são essenciais pois, como já sabemos, têm como consequência, respectivamente, um *método de prova* para provarmos propriedades que são verdadeiras para todas as fórmulas. e um *método de definição* para definirmos conceitos que se aplicam a todas as fórmulas.

Vamos considerar, inicialmente, o método de definição:

Método de definição por recursão em fórmulas.

Para definir um conceito \mathcal{C} para *todas* as fórmulas, basta fazer o seguinte:

1. Definir o conceito \mathcal{C} para todas as variáveis para sentenças.
2. Supor que o conceito \mathcal{C} está definido para fórmulas arbitrárias φ e ψ .
3. Mostrar como o conceito \mathcal{C} pode ser definido para as fórmulas $(\neg\varphi)$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$ e $(\varphi \leftrightarrow \psi)$, usando a hipótese de que \mathcal{C} está definido para φ e ψ .

Vejamos um exemplo de definição por recursão, isto é, vamos apresentar um texto que define o conceito segundo os itens especificado acima. Enfatizamos que, para ser aceita como uma definição recursiva, além de conter todos os itens acima, o texto deve estar escrito de acordo com os padrões de redação que foram explicitados na Aula 1.

Exemplo 3.1 Considere o seguinte conceito sobre fórmulas φ .

$\text{VS}[\varphi]$: conjunto das variáveis para sentenças de φ .

Por exemplo, $\text{VS}[p] = \text{VS}[(p \wedge (\neg p))] = \{p\}$ e $\text{VS}[(p \vee q) \wedge ((\neg p) \vee (\neg q))] = \{p, q\}$.

Vamos definir $\text{VS}[\varphi]$ usando o Método de Definição por Recursão em Fórmulas (você deve usar o texto abaixo como modelo para a elaboração de suas próprias definições).

Definição 3.1 Seja φ uma fórmula de LC.

O conjunto das variáveis para sentenças de φ , denotado por $VS[\varphi]$, é definido recursivamente pelas seguintes regras:

1. Se φ for uma variável para sentença, então $VS[\varphi] = \{\varphi\}$.
2. Se φ for uma negação ($\neg\psi$), então $VS[\varphi] = VS[\psi]$.
3. Se φ for uma conjunção ($\psi \wedge \theta$), então $VS[\varphi] = VS[\psi] \cup VS[\theta]$.
4. Se φ for uma disjunção ($\psi \vee \theta$), então $VS[\varphi] = VS[\psi] \cup VS[\theta]$.
5. Se φ for uma implicação ($\psi \rightarrow \theta$), então $VS[\varphi] = VS[\psi] \cup VS[\theta]$.
6. Se φ for uma biimplicação ($\psi \leftrightarrow \theta$), então $VS[\varphi] = VS[\psi] \cup VS[\theta]$.

Como é usual, para poupar espaço e tempo, costumamos agregar as regras da definição que são inteiramente semelhantes.

Exemplo 3.2 Uma maneira perfeitamente legítima de redigir a definição acima é:

Definição 3.2 Seja φ uma fórmula de LC.

O conjunto das variáveis para sentenças de φ , denotado por $VS[\varphi]$, é definido recursivamente pelas seguintes regras:

1. Se φ for uma variável para sentença, então $VS[\varphi] = \{\varphi\}$.
2. Se φ for uma negação ($\neg\psi$), então $VS[\varphi] = VS[\psi]$.
3. Se φ for uma conjunção ($\psi \wedge \theta$), então $VS[\varphi] = VS[\psi] \cup VS[\theta]$.
4. Os casos \vee , \rightarrow e \leftrightarrow são inteiramente análogos ao caso \wedge .

Exercício 3.1 Defina os seguintes conceitos sobre fórmulas φ , usando o Método de Definição por Recursão em Fórmulas.

1. $SF[\varphi]$: conjunto das subfórmulas de φ ;
2. $Con[\varphi]$: conjunto dos conectivos de φ ;
3. $NCon[\varphi]$: número de ocorrências de conectivos em φ ;
4. $Comp[\varphi]$: comprimento de φ .

Quando contamos ocorrências de símbolos, as repetições de símbolos são contabilizadas.

4 Indução em fórmulas

Vamos considerar, agora, o método de prova:

Método de Prova por Indução em Fórmulas.

Para provar que uma dada propriedade $P(x)$, envolvendo uma variável x que toma expressões como valores, é verdadeira para *todas* as fórmulas, basta fazer o seguinte:

1. Provar que $P(x)$ é verdadeira para todas as variáveis para sentenças.
2. Supor que $P(x)$ é verdadeira para fórmulas arbitrárias φ e ψ .
3. Provar que $P(x)$ é verdadeira para as fórmulas $(\neg\varphi)$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$ e $(\varphi \leftrightarrow \psi)$, usando a hipótese de que $P(x)$ é verdadeira para φ e ψ .

Vamos ver um exemplo de prova por indução em fórmulas, isto é, vamos apresentar um texto que justifica que uma certa propriedade é verdadeira para todas as fórmulas. Enfatizamos que para ser aceita como uma prova por indução, além de conter todos os itens acima, o texto deve estar escrito de acordo com os padrões de redação que foram explicitados na Aula 1.

Exemplo 4.1 Usando o método acima, vamos provar a seguinte propriedade, que é verdadeira para todas as fórmulas:

Toda fórmula tem o mesmo número de ocorrências de abre e fecha parênteses.

Para isto, vamos considerar a propriedade

$P(x)$: x tem o mesmo número de ocorrências de abre e fecha parênteses,

sobre expressões x , e provar que

1. $P(x)$ é verdadeira para todas as variáveis para sentenças.
2. Supor que $P(x)$ é verdadeira para fórmulas arbitrárias φ e ψ .
3. Provar que $P(x)$ é verdadeira para as fórmulas $(\neg\varphi)$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$ e $(\varphi \leftrightarrow \psi)$, usando a hipótese de que $P(x)$ é verdadeira para φ e ψ .

Como usual, em provas por indução, a prova tem 3 partes, classificadas como *base*, *hipótese* e *passo de indução*. Neste caso, também é conveniente introduzir as seguintes notações:

$na[\varphi]$: o número de ocorrências de abre parêntese em φ
 $nf[\varphi]$: o número de ocorrências de fecha parêntese em φ

Vamos, agora à prova propriamente dita (você deve usar o texto abaixo como um modelo para a elaboração de suas próprias provas):

PROVA. Por indução em fórmulas, φ .

Base: Seja φ uma variável proposicional. Temos que $na[\varphi] = nf[\varphi] = 0$. Logo, φ tem o mesmo número de ocorrências de abre e fecha parênteses.

Hipótese: Suponha que φ e ψ têm, cada uma, o mesmo número de ocorrências de abre e fecha parênteses. Ou seja, suponha que $na[\varphi] = nf[\varphi]$ e $na[\psi] = nf[\psi]$.

Passo: O passo consistirá de 5 casos, um para cada conectivo.

Para $(\neg\varphi)$, temos:

$$\begin{aligned} na[(\neg\varphi)] &= na[\varphi] + 1 \\ &= nf[\varphi] + 1, && \text{pela IH,} \\ &= nf[(\neg\varphi)]. \end{aligned}$$

Logo, $(\neg\varphi)$ tem o mesmo número de ocorrências de abre e fecha parênteses.

Para $(\varphi \wedge \psi)$, temos:

$$\begin{aligned} na[(\varphi \wedge \psi)] &= na[\varphi] + na[\psi] + 1 \\ &= nf[\varphi] + nf[\psi] + 1, && \text{pela IH,} \\ &= nf[(\varphi \wedge \psi)]. \end{aligned}$$

Logo, $(\varphi \wedge \psi)$ tem o mesmo número de ocorrências de abre e fecha parênteses.

Para $(\varphi \vee \psi)$, temos:

$$\begin{aligned} na[(\varphi \vee \psi)] &= na[\varphi] + na[\psi] + 1 \\ &= nf[\varphi] + nf[\psi] + 1, && \text{pela IH,} \\ &= nf[(\varphi \vee \psi)]. \end{aligned}$$

Logo, $(\varphi \vee \psi)$ tem o mesmo número de ocorrências de abre e fecha parênteses.

Para $(\varphi \rightarrow \psi)$, temos:

$$\begin{aligned} na[(\varphi \rightarrow \psi)] &= na[\varphi] + na[\psi] + 1 \\ &= nf[\varphi] + nf[\psi] + 1, && \text{pela IH,} \\ &= nf[(\varphi \rightarrow \psi)]. \end{aligned}$$

Logo, $(\varphi \rightarrow \psi)$ tem o mesmo número de ocorrências de abre e fecha parênteses.

Para $(\varphi \leftrightarrow \psi)$, temos:

$$\begin{aligned} \text{na}[(\varphi \leftrightarrow \psi)] &= \text{na}[\varphi] + \text{na}[\psi] + 1 \\ &= \text{nf}[\varphi] + \text{nf}[\psi] + 1, \quad \text{pela IH,} \\ &= \text{nf}[(\varphi \leftrightarrow \psi)]. \end{aligned}$$

Logo, $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ tem o mesmo número de ocorrências de abre e fecha parênteses. ■

Como é usual, para poupar espaço e tempo, costumamos agregar os passos da prova que são inteiramente semelhantes.

Exemplo 4.2 Uma maneira perfeitamente legítima de redigir a prova acima é a seguinte:

PROVA. Por indução em fórmulas, φ .

Base: Seja φ uma variável proposicional. Temos que $\text{na}[\varphi] = \text{nf}[\varphi] = 0$. Logo, φ tem o mesmo número de ocorrências de abre e fecha parênteses.

Hipótese: Suponha que φ e ψ têm, cada uma, o mesmo número de ocorrências de abre e fecha parênteses. Ou seja, suponha que $\text{na}[\varphi] = \text{nf}[\varphi]$ e $\text{na}[\psi] = \text{nf}[\psi]$.

Passo: Para $(\neg\varphi)$, temos:

$$\begin{aligned} \text{na}[(\neg\varphi)] &= \text{na}[\varphi] + 1 \\ &= \text{nf}[\varphi] + 1, \quad \text{pela IH,} \\ &= \text{nf}[(\neg\varphi)]. \end{aligned}$$

Logo, $(\neg\varphi)$ tem o mesmo número de ocorrências de abre e fecha parênteses.

Para $(\varphi \wedge \psi)$, temos:

$$\begin{aligned} \text{na}[(\varphi \wedge \psi)] &= \text{na}[\varphi] + \text{na}[\psi] + 1 \\ &= \text{nf}[\varphi] + \text{nf}[\psi] + 1, \quad \text{pela IH,} \\ &= \text{nf}[(\varphi \wedge \psi)]. \end{aligned}$$

Logo, $(\varphi \wedge \psi)$ tem o mesmo número de ocorrências de abre e fecha parênteses.

Os casos \vee , \rightarrow e \leftrightarrow são inteiramente análogos ao caso \wedge . ■

Exercício 4.1 Mostre que para toda fórmula φ que não contém o conectivo \neg vale que:

1. $\text{Comp}[\varphi]$ é um número ímpar;
2. $\text{Comp}[\varphi] = 2 \text{NCon}[\varphi] + 1$.

5 Exercícios

As seguintes propriedades sobre expressões x são verdadeiras para todas as fórmulas. Baseado na redação da prova apresentada no Exemplo 4.1, apresente uma prova por indução em fórmulas para cada uma delas, ou seja, introduza notações convenientes e escreva uma prova explicitando a base, a hipótese e o passo.

1. $P(x)$: x tem a ocorrência de pelo menos uma variável para sentenças.
2. $Q(x)$: o número de ocorrências de parênteses em x é igual ao dobro do número de ocorrências de conectivos em x .

© 2014 Renata de Freitas e Petrucio Viana
IME-UFF, Niterói, RJ