Equivalência em LC

Renata de Freitas *e* Petrucio Viana

IME - UFF

27 de março de 2015

Sumário

Parte 1

Equivalência de sentenças

Simbolização não é determinística

Dependendo de como entendemos o significado de uma sentença, ela pode ser simbolizada de mais de uma maneira.

Se vou à praia, só levo o meu protetor, se o sol estiver muito forte.

Redução de ocorrências de parênteses 1

Podemos não escrever o par de parênteses externo, quando ficar claro qual é a fórmula em questão.

Por exemplo, podemos escrever

$$\neg p \quad , \quad p \wedge (q \rightarrow r) \quad , \quad (p \vee q) \leftrightarrow (\neg s)$$

no lugar de

$$(\neg p) \quad , \quad (p \wedge (q \rightarrow r)) \quad , \quad ((p \vee q) \leftrightarrow (\neg s))$$

LC vai à praia

Se vou à praia, só levo o meu protetor, se o sol estiver muito forte.

$$\begin{array}{lcl} v & : & \text{eu vou à praia} \\ l & : & \text{eu levo o meu protetor} \\ f & : & \text{o sol está muito forte} \end{array}$$

$$v \to (f \to l)$$

LC vai à praia

Outras análises levam a outras possíveis simbolizações:

$$f \rightarrow (v \rightarrow l)$$

$$v \rightarrow (f \leftrightarrow l)$$

$$f \rightarrow (v \leftrightarrow l)$$

Problema da simbolização

Dadas
Uma sentença S da Linguagem Natural e uma fórmula φ de LC.

Questão
Decidir se φ é uma simbolização de S.

Não vamos tratar deste problema diretamente, pois sua resolução está além do escopo da Lógica Formal.

Vamos tentar, em cada caso, analisar a sentença, usando o bom senso e as Tabelas de Avaliação.

LC vai à praia

α : quando vou à praia, só levo o meu protetor, se o sol estiver muito forte

v	l	f	α
V	V	V	
V	V	F	
V	F	V	
V	F	F	
F	V	V	
F	V	F	
F	F	V	
F	F	F	

LC vai à praia

α : quando vou à praia, só levo o meu protetor, se o sol estiver muito forte

v	l	f	α
V	V	V	V
V	V	F	
V	F	V	
V	F	F	
F	V	V	
F	V	F	
F	F	V	
F	F	F	

LC vai à praia

α : quando vou à praia, só levo o meu protetor, se o sol estiver muito forte

v	l	f	α
V	V	V	V
V	V	F	F
V	F	V	
V	F	F	
F	V	V	
F	V	F	
F	F	V	
F	F	F	

LC vai à praia

α : quando vou à praia, só levo o meu protetor, se o sol estiver muito forte

v	l	f	α
V	V	V	V
V	V	F	F
V	F	V	F
V	F	F	
F	V	V	
F	V	F	
F	F	V	
F	F	F	

As escolhas de F para a segunda e a terceira interpretações são baseadas na leitura de

só levo o protetor, se o sol está forte

como

(se o sol está forte, então eu levo protetor) e (se o sol não está forte, então eu não levo o protetor)

LC vai à praia

α : quando vou à praia, só levo o meu protetor, se o sol estiver muito forte

v	l	f	α
V	V	V	V
V	V	F	F
V	F	V	F
V	F	F	V
F	V	V	
F	V	F	
F	F	V	
F	F	F	

Um problema, parece, é avaliar a sentença quando

eu vou à praia

é F.

LC vai à praia

Para simbolizar

$$\text{quando } \alpha, \text{ temos } \beta$$

o bom senso manda escolher o se, ... então:

$$\text{se } \alpha, \text{ então } \beta$$

Assim, o bom senso e as tabelas garantem que a resposta correta é

$$v \rightarrow (l \rightarrow f)$$

e, neste caso, o problema está resolvido.

Como Descarte já dizia

Le bon sens est la chose du monde la mieux partagée; car chacun pense en être si bien pourvu, que ceux même qui sont les plus difficiles à contenter en toute autre chose n'ont point coutume d'en désirer plus qu'ils en ont.

Discours de la Méthode, 1637.

Parte 2

Equivalência semântica

Problema da equivalência semântica

Dadas
Duas fórmulas φ e ψ de LC.

Questão
Decidir se φ e ψ expressam o mesmo conteúdo.

Em LC esta questão só faz sentido se, por "expressar o mesmo conteúdo" queremos dizer "a menos da maneira como a sentença é formada a partir de sentenças atômicas por meio dos conectivos".

Linguagem Natural $\times$ Lógica

Em LC:

$$\neg(\neg\varphi) \quad \text{é equivalente a} \quad \varphi$$

Na Língua Portuguesa:

não, você não vai para a chopada

$\neq$

você vai para a chopada

Equivalência semântica

Sejam $\varphi, \psi \in FLC$.

Uma *interpretação* para φ e ψ é uma interpretação para $VS[\varphi] \cup VS[\psi]$.

Dizemos que φ e ψ são *semanticamente equivalentes*, denotado por $\varphi \mid\!\equiv\!\mid \psi$, se, para cada interpretação I para φ e ψ, temos $I^*[\varphi] = I^*[\psi]$.

Parte 3

Tabelas para equivalências

Tabelas para equivalência

Assim, o que queremos é, dadas duas fórmulas, classificá-las como equivalentes ou não.

Podemos usar as tabelas de avaliação, de maneira direta, para resolver este problema.

$\varphi \models\!\!\!\dashv \psi$ se, e somente se, $T[\varphi] = T[\psi]$.

Exemplo 1

$$v \rightarrow (f \rightarrow l) \mathrel{|\!\!=\!\!=\!\!|} f \rightarrow (v \rightarrow l) \quad ?$$

É mais econômico construir uma *tabela conjunta*:

v	f	l	$f \rightarrow l$	$v \rightarrow (f \rightarrow l)$	$v \rightarrow l$	$f \rightarrow (v \rightarrow l)$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	F	F	F
V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F	V
F	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V
				$\Uparrow$		$\Uparrow$

Como as fórmulas possuem os mesmos valores nas mesmas interpretações, elas são equivalentes.

Exemplo 2

$$v \rightarrow (f \rightarrow l) \models\!\!\!=\!\!\!| \; v \rightarrow (f \leftrightarrow l) \quad ?$$

Já sabemos que não.

v	f	l	$v \rightarrow (f \rightarrow l)$	$v \rightarrow (f \leftrightarrow l)$	
V	V	V	V	V	
V	V	F	F	F	
V	F	V	V	F	$\Leftarrow$
V	F	F	V	V	
F	V	V	V	V	
F	V	F	V	V	
F	F	V	V	V	
F	F	F	V	V	
			$\Uparrow$	$\Uparrow$	

Como existe ao menos uma interpretação na qual as fórmulas possuem valores diferentes, elas não são equivalentes.

Método das Tabelas para Equivalência

Sejam $\varphi, \psi \in FLC$, tais que $VS[\varphi] \cup VS[\psi] = \{s_1, \ldots, s_m\}$.

A determinação da equivalência de φ e ψ pode ser feita mediante a execução do seguinte algoritmo, que constroi a *tabela conjunta* de φ e ψ:

1. Em uma *linha de referência*, escreva as variáveis para sentença $s_1, \ldots, s_m$.
2. Abaixo da linha de referência, escreva, como usual, todas as interpretações para $\{s_1, \ldots, s_m\}$.

Método das Tabelas para equivalência

3. Utilizando as tabelas dos conectivos, calcule "de baixo para cima" todos os valores das subfórmulas de φ, até obter o valor de φ.

4 Utilizando as tabelas dos conectivos, calcule "de baixo para cima" todos os valores das subfórmulas de ψ que ainda não foram calculados, até obter o valor de ψ.

5. Compare a coluna rotulada com φ com a coluna rotulada com ψ. Se elas são iguais, $\varphi \models\mid \psi$. Caso contrário, φ e ψ não são equivalentes.

Parte 4

Principais equivalências

Principais equivalências

Dentre todos os pares de fórmulas equivalentes, alguns podem ser vistos como expressando *propriedades algébricas* dos conectivos.

Em tudo o que segue, φ, ψ e θ são fórmulas quaisquer de LC.

Cada equivalência abaixo é um *esquema* expressando infinitas equivalências, cada uma obtida pela substituição de φ, ψ e θ por fórmulas de LC específicas.

Propriedades do $\neg$

$$\neg(\neg\varphi) \models\!\!\!\!\!\!= \!\!\!\!\dashv\ \varphi$$

Intuitivamente, $\neg\varphi$ é F sse φ é V.
Algebricamente, $\neg$ é *involutivo*.

$$\neg(\varphi \wedge \psi) \models\!\!\!\!\!\!= \!\!\!\!\dashv\ (\neg\varphi) \vee (\neg\psi)$$

Intuitivamente, $\varphi \wedge \psi$ é F sse φ é F ou ψ é F.
Algebricamente, $\neg$ *transforma conjunções em disjunções*.

Propriedades do $\neg$

$$\neg(\varphi \vee \psi) \models\mid (\neg\varphi) \wedge (\neg\psi)$$

Intuitivamente, $\varphi \vee \psi$ é F sse φ é F e ψ é F.
Algebricamente, $\neg$ *transforma disjunções em conjunções*.

$$\neg(\varphi \to \psi) \models\mid \varphi \wedge (\neg\psi)$$

Intuitivamente, $\varphi \to \psi$ é F sse φ é V e ψ é F.
Algebricamente, $\neg$ *transforma implicações em conjunções*.

Propriedades do $\neg$

$$\neg(\varphi \leftrightarrow \psi) \mathrel{|}\!\!\!\equiv\!\!\!\mathrel{|} (\varphi \wedge (\neg\psi)) \vee ((\neg\varphi) \wedge \psi)$$

Intuitivamente, $\varphi \leftrightarrow \psi$ é F sse φ e ψ têm valores opostos.
Algebricamente, $\neg$ *transforma bi-implicações em disjunções*.

Estas equivalências reescrevem a fórmula, “empurrando” o $\neg$ para as fórmulas componentes.

Propriedades do $\wedge$

$$(\varphi \wedge \psi) \wedge \theta \models\mid \varphi \wedge (\psi \wedge \theta)$$

Intuitivamente, conjunções de mais de duas fórmulas podem ser lidas em qualquer ordem de precedência.
Algebricamente, $\wedge$ *é associativo*.

$$\varphi \wedge \psi \models\mid \psi \wedge \varphi$$

Intuitivamente, conjunções podem ser lidas em qualquer ordem.
Algebricamente, $\wedge$ *é comutativo*.

Propriedades do $\wedge$

$$\varphi \wedge \varphi \mathrel{|\!\!=\!\!|} \varphi$$

Intuitivamente, conjunções com componentes repetidos podem ser simplificadas.
Algebricamente, $\wedge$ *é idempotente*.

$$\varphi \wedge (\psi \vee \theta) \mathrel{|\!\!=\!\!|} (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \theta)$$

Algebricamente, $\wedge$ *distribui sobre* $\vee$.

Propriedades do $\wedge$

Como esta última equivalência não é tão imediata, vamos verificá-la pelo Método das Tabelas:

φ	ψ	θ	$\psi \vee \theta$	$\varphi \wedge (\psi \vee \theta)$	$\varphi \wedge \psi$	$\varphi \wedge \theta$	$(\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \theta)$
V	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*
V	*V*	*F*	*V*	*V*	*V*	*F*	*V*
V	*F*	*V*	*V*	*V*	*F*	*V*	*V*
V	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*
F	*V*	*V*	*V*	*F*	*F*	*F*	*F*
F	*V*	*F*	*V*	*F*	*F*	*F*	*F*
F	*F*	*V*	*V*	*F*	*F*	*F*	*F*
F	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*
				$\Uparrow$			$\Uparrow$

Como as fórmulas possuem os mesmos valores nas mesmas interpretações, elas são equivalentes.

Propriedades do $\wedge$

$$\varphi \wedge (\varphi \vee \psi) \models\mid \varphi$$

Intuitivamente, lendo da esquerda para a direita, um componente garante a disjunção.
Algebricamente, $\wedge$ *absorve* $\vee$.

Como esta última equivalência não é tão imediata, vamos verificá-la pelo Método das Tabelas:

φ	ψ	$\varphi \vee \psi$	$\varphi \wedge (\varphi \vee \psi)$
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	V	F
F	F	F	F
$\Uparrow$			$\Uparrow$

Como as fórmulas possuem os mesmos valores nas mesmas interpretações, elas são equivalentes.

Propriedades do $\wedge$

Se $\top$ é uma fórmula verdadeira em todas as interpretações, então:

$$\varphi \wedge \top \models\!\!\!\!\!\dashv \varphi$$

Intuitivamente, fórmulas válidas não afetam o valor de conjunções. Algebricamente, qualquer fórmula válida é um *elemento neutro* do $\wedge$.

Propriedades do $\vee$

$$(\varphi \vee \psi) \vee \theta \mathrel{|}\joinrel\Relbar\joinrel\mathrel{|} \varphi \vee (\psi \vee \theta)$$

Intuitivamente, disjunções de mais de duas fórmulas podem ser lidas em qualquer ordem de precedência.
Algebricamente, $\vee$ *é associativo*.

$$\varphi \vee \psi \mathrel{|}\joinrel\Relbar\joinrel\mathrel{|} \psi \vee \varphi$$

Intuitivamente, disjunções podem ser lidas em qualquer ordem.
Algebricamente, $\vee$ *é comutativo*.

Propriedades do $\vee$

$$\varphi \vee \varphi \mathrel{|}\joinrel\Relbar\joinrel\mathrel{|} \varphi$$

Intuitivamente, disjunções com componentes repetidos podem ser simplificadas.
Algebricamente, $\vee$ *é idempotente*.

$$\varphi \vee (\psi \wedge \theta) \mathrel{|}\joinrel\Relbar\joinrel\mathrel{|} (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \theta)$$

Algebricamente, $\vee$ *distribui sobre* $\wedge$.

Propriedades do $\vee$

Como esta última equivalência não é tão imediata, vamos verificá-la pelo Método das Tabelas:

φ	ψ	θ	$\psi \wedge \theta$	$\varphi \vee (\psi \wedge \theta)$	$\varphi \vee \psi$	$\varphi \vee \theta$	$(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \theta)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	F	V	F	F
F	F	V	F	F	F	V	F
F	F	F	F	F	F	F	F
				$\Uparrow$			$\Uparrow$

Como as fórmulas possuem os mesmos valores nas mesmas interpretações, elas são equivalentes.

Propriedades do $\vee$

$$\varphi \vee (\varphi \wedge \psi) \models\!\!\!\dashv \varphi$$

Algebricamente, $\vee$ *absorve* $\wedge$.

Como esta última equivalência não é tão imediata, vamos verificá-la pelo Método das Tabelas:

φ	ψ	$\varphi \wedge \psi$	$\varphi \vee (\varphi \wedge \psi)$
V	*V*	*V*	*V*
V	*F*	*F*	*V*
F	*V*	*F*	*F*
F	*F*	*F*	*F*
$\Uparrow$			$\Uparrow$

Como as fórmulas possuem os mesmos valores nas mesmas interpretações, elas são equivalentes.

Propriedades do $\vee$

Se $\perp$ é uma fórmula falsa em todas as interpretações, então:

$$\varphi \vee \perp \models\mid \varphi$$

Intuitivamente, fórmulas que são sempre falsas não afetam o valor de disjunções.
Algebricamente, qualquer fórmula que nunca é V é um *elemento neutro* do $\vee$.

Dualidade

Observe a dualidade existente entre as equivalências sobre o $\wedge$ e as equivalências sobre o $\vee$: elas ocorrem em pares.

Por exemplo,

$$\varphi \wedge (\psi \vee \theta) \models\mid (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \theta)$$

e

$$\varphi \vee (\psi \wedge \theta) \models\mid (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \theta)$$

Em cada par, cada uma delas pode ser transformada na outra pela substituição de $\wedge$ por $\vee$ e vice-versa; e de $\top$ por $\bot$ e vice-versa.

Eliminação do $\rightarrow$ e do $\leftrightarrow$

$$\varphi \rightarrow \psi \models\mathrel{\mkern-3mu}\dashv (\neg\varphi) \vee \psi$$

Intuitivamente, uma implicação é V quando o antecedente é F ou o consequente é V.
Além disso, uma implicação pode ser reescrita como uma disjunção.

$$\varphi \leftrightarrow \psi \models\mathrel{\mkern-3mu}\dashv (\varphi \wedge \psi) \vee (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$$

Intuitivamente, uma bi-implicação é V quando ambos os componentes são V ou ambos os componentes são F.
Além disso, uma bi-implicação pode ser reescrita como uma disjunção.

Parte 5

Exercícios: Shagadelic baby, YEAH!

Exercício 1

Simbolize as seguintes sentenças em LC:

(i) *se chover mas eu ficar em casa, eu não vou me molhar*

(ii) *eu vou me molhar quando chover*

(iii) *se chover e a ida ao cinema não for cancelada, eu não vou ficar em casa*

(iv) *cancelada ou não a ida ao cinema, eu vou ficar em casa caso chova*

(v) *se chover, eu vou ficar em casa, se não, não*

Exercício 2

Verifique se os seguintes enunciados são equivalentes:

(i) *não é o caso que este triângulo é retângulo e ao mesmo tempo obtusângulo*

e

este triângulo é retângulo e, portanto, não é obtusângulo

(ii) *não é o caso que: x é primo se, e somente se, x é ímpar*

e

x é primo ou ímpar

(iii) *s é perpendicular a t segue de: r é paralela a s e perpendicular a t*

e

r é paralela a s e s não é perpendicular a t acarreta em r não é perpendicular a t

Exercício 2

(iv) *se r é perpendicular a s e s é perpendicular a t, então r é perpendicular a t*

e

se r não é perpendicular a s e s não é perpendicular a t, então r não é perpendicular a t

(v) *se x é par e primo, então x é diferente de 2*

e

se $x = 2$, então x nem é par nem primo

Mais exercícios!!!

1. Ler o texto da Aula 5.

2. Resolver os exercícios da Lista 5.