Transformação usando equivalências em LC

Renata de Freitas *e* Petrucio Viana

IME - UFF

30 de março de 2015

Sumário

Parte 1

Raciocinando com equivalências

Mudança de perspectiva

A principal aplicação das equivalências que listamos na última aula é que, por meio delas, podemos reescrever as fórmulas e, na medida do possível, simplificá-las.

Por exemplo, se temos a fórmula

$$p \wedge (p \rightarrow q)$$

podemos simplificá-la, efetuando a sequência de equivalências a seguir.

Simplificando $p \wedge (p \to q)$

$$p \wedge (p \to q)$$

Simplificando $p \wedge (p \rightarrow q)$

$$\begin{array}{lcl} p \wedge (p \rightarrow q) & \models\!\!\!\!=\!\!\!\!\models & (\text{elim. } \rightarrow) \\ p \wedge ((\neg p) \vee q) & & \end{array}$$

Simplificando $p \wedge (p \to q)$

$$
\begin{array}{lcl}
p \wedge (p \to q) & \models\!\!\dashv & (\text{elim. } \to) \\
p \wedge ((\neg p) \vee q) & \models\!\!\dashv & (\wedge \text{ dist. } \vee) \\
(p \wedge (\neg p)) \vee (p \wedge q) & &
\end{array}
$$

Simplificando $p \wedge (p \rightarrow q)$

$$
\begin{array}{lll}
p \wedge (p \rightarrow q) & \models\!\!\!\!= \!\!\!\!\!\dashv & (\text{elim. } \rightarrow) \\
p \wedge ((\neg p) \vee q) & \models\!\!\!\!= \!\!\!\!\!\dashv & (\wedge \text{ dist. } \vee) \\
(p \wedge (\neg p)) \vee (p \wedge q) & \models\!\!\!\!= \!\!\!\!\!\dashv & (\perp \text{ neut. } \vee) \\
p \wedge q & &
\end{array}
$$

Simplificando $(\neg p) \to (p \wedge q)$

$$(\neg p) \to (p \wedge q)$$

Simplificando $(\neg p) \to (p \wedge q)$

$$
\begin{array}{lcl}
(\neg p) \to (p \wedge q) & \models\!\!\!=\!\!\!| & (\text{elim. } \to) \\
(\neg(\neg p)) \vee (p \wedge q) & &
\end{array}
$$

Simplificando $(\neg p) \rightarrow (p \wedge q)$

$$\begin{array}{lcl} (\neg p) \rightarrow (p \wedge q) & \models\!\!\!\!=\!\!\!\!\dashv & (\text{elim. } \rightarrow) \\ (\neg(\neg p)) \vee (p \wedge q) & \models\!\!\!\!=\!\!\!\!\dashv & (\neg \text{ invo.}) \\ p \vee (p \wedge q) & & \end{array}$$

Simplificando $(\neg p) \to (p \wedge q)$

$$
\begin{array}{lcl}
(\neg p) \to (p \wedge q) & \models\!\!\!\!\!\!\!\!\models & (\text{elim. } \to) \\
(\neg(\neg p)) \vee (p \wedge q) & \models\!\!\!\!\!\!\!\!\models & (\neg \text{ invo.}) \\
p \vee (p \wedge q) & \models\!\!\!\!\!\!\!\!\models & (\vee \text{ dist. } \wedge) \\
(p \vee p) \wedge (p \vee q) & &
\end{array}
$$

Simplificando $(\neg p) \to (p \wedge q)$

$$
\begin{array}{lcl}
(\neg p) \to (p \wedge q) & \models\!\!\mid & (\text{elim. } \to) \\
(\neg(\neg p)) \vee (p \wedge q) & \models\!\!\mid & (\neg \text{ invo.}) \\
p \vee (p \wedge q) & \models\!\!\mid & (\vee \text{ dist. } \wedge) \\
(p \vee p) \wedge (p \vee q) & \models\!\!\mid & (\vee \text{ idem.}) \\
p \wedge (p \vee q) & &
\end{array}
$$

Simplificando $(\neg p) \to (p \wedge q)$

$$
\begin{array}{lcl}
(\neg p) \to (p \wedge q) & \vDash\Dashv & (\text{elim. } \to) \\[1em]
(\neg(\neg p)) \vee (p \wedge q) & \vDash\Dashv & (\neg \text{ invo.}) \\[1em]
p \vee (p \wedge q) & \vDash\Dashv & (\vee \text{ dist. } \wedge) \\[1em]
(p \vee p) \wedge (p \vee q) & \vDash\Dashv & (\vee \text{ idem.}) \\[1em]
p \wedge (p \vee q) & \vDash\Dashv & (\wedge \text{ abso. } \vee) \\[1em]
p & &
\end{array}
$$

Redução de ocorrências de parênteses 2

Podemos não escrever os parênteses em volta das negações, considerando que o escopo do $\neg$ é a menor fórmula que ocorre imediatamente à direita dele.

Por exemplo,

$$\neg\neg p \to (\neg q \vee s)$$

é

$$(\neg(\neg p)) \to ((\neg q) \vee s)$$

e não

$$(\neg(p \to (\neg(q \vee s)))$$

Simplificando $(\neg p) \to (p \wedge q)$

Com as notações que reduzem as ocorrências de parênteses, temos:

$$
\begin{array}{lcl}
\neg p \to (p \wedge q) & \models\!\dashv & (\text{elim. } \to) \\
\neg\neg p \vee (p \wedge q) & \models\!\dashv & (\neg \text{ invo.}) \\
p \vee (p \wedge q) & \models\!\dashv & (\vee \text{ dist. } \wedge) \\
(p \vee p) \wedge (p \vee q) & \models\!\dashv & (\vee \text{ idem.}) \\
p \wedge (p \vee q) & \models\!\dashv & (\wedge \text{ abso. } \vee) \\
p & &
\end{array}
$$

Simplificando fórmulas através de equivalências

A ideia principal ilustrada nos exemplos acima, para simplificar uma fórmula φ, é a seguinte:

1. examinar φ;
2. instanciar uma equivalência $\psi \models\!\!\!\!\!=\!\!\!\!\!\dashv \theta$, de um estoque de esquemas de equivalências previamente dado, de modo que ψ seja uma subfórmula de φ;
3. trocar a subfórmula ψ de φ pela fórmula θ, deixando o resto da fórmula inalterado;
4. repetir iteradamente os passos acima, até que a fórmula esteja simplificada.

Parte 2

Negação de sentenças atômicas

Negação de sentenças atômicas

Na análise de textos matemáticos, em certas ocasiões, sentenças que não têm ocorrências explícitas de conectivos, mas cuja interpretação revela estes conectivos implícitos, podem ser reescritas de modo a serem classificados como moleculares, de acordo com a nossa conveniência. Isto pode acontecer tanto com o **não** quanto com os outros conectivos.

Exemplo 1

Como

2 é ímpar

tem o mesmo significado que

2 não é par

é possível que em certos contextos seja mais adequado interpretar

2 é ímpar

como obtido pela aplicação do

não

à sentença

2 é par

Exemplo 3

Como já vimos, a sentença

os números 2, 4, 6 são pares

pode ser interpretado como

2 *é par e* 4 *é par, e* 6 *é par*

isto é, como tendo sido formada pela aplicação iterada do conectivo

e

à sentença

2 *é par* , 4 *é par* , 6 *é par*

Negação de sentenças atômicas

Muitas vezes, as negações são formadas pela colocação de certos prefixos bem definidos junto a alguma palavra que ocorre no enunciado que está sendo negado.

Por exemplo, o prefixo

in

na frase

João é infeliz

Negação de sentenças atômicas

Em Matemática, além do uso do conectivo **não** a negação é feita pelo emprego de certas convenções sobre como os símbolos são usados no discurso matemático.

Por exemplo, é comum negarmos uma proposição que envolve um símbolo especial, riscando o símbolo com barras como $/$ ou $|$.

conceito	símbolo	negação
pertinência	$\in$	$\notin$
inclusão	$\subseteq$	$\not\subseteq$
igualdade	$=$	$\neq$
precedência	$<$	$\geq$
sucessão	$>$	$\leq$

Parte 3

Negação de sentenças moleculares

Negação de sentenças moleculares

Para negar uma sentença molecular φ, basta escrever o símbolo $\neg$ antes da sentença, obtendo $\neg\varphi$.

Por exemplo, estritamente falando, a negação do enunciado

> para todo número real positivo, ϵ, existe um número real positivo, δ, tal que: se a distância de x até a é menor que δ, então a distância de $f(x)$ até $f(a)$ é menor que ϵ

é, "simplesmente",

> $\neg$(para todo número real positivo, ϵ, existe um número real positivo, δ, tal que: se a distância de x até a é menor que δ, então a distância de $f(x)$ até $f(a)$ é menor que ϵ)

Negação de sentenças moleculares

Mas, quando falamos em negar uma sentença molecular, não estamos falando em negar no sentido estrito. O que queremos, na verdade, é um enunciado equivalente à negação, que nos transmita alguma informação mais adequada do que a obtida simplesmente pela colocação de uma ocorrência do símbolo $\neg$ na frente da sentença negada.

Negação de sentenças moleculares

Por exemplo, uma maneira de reescrever a negação de

todos os alunos gostam de Lógica

é

alguns alunos não gostam de Lógica

que é muito mais informativo que

$\neg$(*todos os alunos gostam de Lógica*)

Assim, parte do trabalho envolvido no problema de negar um enunciado molecular é reescrever a negação de uma maneira adequada. O repertório de fórmulas equivalentes apresentado na última aula é uma ferramenta útil para este fim.

Parte 4

Exercícios: amo muito tudo isso!

Exercício 1

Escreva a negação de cada sentença a seguir:

(a) 1 *é primo*
(b) $x \in \mathbb{N}$
(c) 10 *é múltiplo de* 2
(d) $\frac{1}{2} \in A$
(e) 2 *e* 4 *são primos entre si*
(f) $\{1, 2\} \subseteq \mathbb{N}$
(g) $\mathbb{N}$ *é infinito*
(h) $2^{10} < 10^2$
(i) $P(A) > 1$

Exercício 2

Escreva a negação de cada sentença a seguir e simplifique as fórmulas obtidas, usando equivalências:

(i) *Não é o caso que* $1 + 2 > \pi$.

(ii) x *é irracional.*

(iii) $2 + 1 = 3$ *e* $2 - 1 \neq 1$.

(iv) ABC *é retângulo e* DEF *é isósceles.*

(v) x *é par ou* x *é primo.*

(vi) $x < y$ *ou* x *não é positivo.*

(vii) *Se* $\mathbb{N}$ *é infinito, então* $\mathbb{Z}$ *não é finito.*

(viii) *Se* A *é finito, então* $P(A) > 1$.

(ix) 2 *é par se, e somente se,* 2^2 *é ímpar.*

(x) ABC *é um triângulo se, e somente se,* $\overline{AX}$ *e* $\overline{BY}$ *são colineares.*

Exercício 3

Verifique as afirmações abaixo, pela aplicação sucessiva de equivalências.

(i) A negação de $(p \wedge q) \wedge r$ é equivalente a $(\neg p) \vee [q \rightarrow (\neg r)]$.

(ii) $(p \wedge \neg q) \rightarrow s$ é equivalente a $(p \wedge \neg s) \rightarrow q$.

(iii) $p \rightarrow (p \vee q)$ é equivalente a $(p \wedge \neg p) \rightarrow q$.

(iv) $(\neg p) \vee ((\neg q) \vee (\neg r))$ é a negação de $\neg(p \rightarrow \neg q) \wedge r$.

(v) A negação de $p \rightarrow (q \rightarrow (p \wedge r))$ é equivalente a negação de $(\neg(p \wedge q)) \rightarrow r$.

Mais exercícios

1. Ler o texto da Aula 6.

2. Resolver os exercícios da Lista 6.