GAN00166: Lógica para Ciência da Computação

Texto da Aula 6

Transformação e negação por meio de equivalentes em LC

Petrucio Viana
Departamento de Análise, IME–UFF

Sumário

1 Transformação de enunciados em equivalentes

Um processo para mostrar que dois enunciados são equivalentes — que também é aplicado na simplificação da negação de um enunciado — é "transformar um enunciado no outro", pela aplicação sucessiva de equivalências. Este processo foi usado, no final da Seção 2 da Parte 3 do Texto da Semana 3, quando mostramos que os enunciados

$$\neg(\varphi \leftrightarrow \psi) \ \text{ e } \ (\varphi \land \neg\psi) \lor (\neg\varphi \land \psi)$$

são equivalentes, por meio da sequência $\neg(\varphi \leftrightarrow \psi)$, $\neg[(\varphi \to \psi) \land (\psi \to \varphi)]$, $\neg(\varphi \to \psi) \lor \neg(\psi \to \varphi)$, $(\varphi \land \neg\psi) \lor (\psi \land \neg\varphi)$, e $(\varphi \land \neg\psi) \lor (\neg\varphi \land \psi)$, de enunciados dois a dois equivalentes.

Em linhas gerais, o processo pode ser resumido do seguinte modo:

Sejam φ e ψ enunciados simbolizados que queremos mostrar que são equivalentes.

A verificação da equivalência de φ e ψ pode ser feita mediante a execução dos seguintes passos, que constroem uma *sequência de enunciados dois a dois equivalentes*:

(1) Inicie a sequência escrevendo o enunciado φ. Ou seja, escreva:

$$\varphi$$

(2) Escolha uma equivalência adequada e transforme φ em um novo enunciado φ_1, transformando φ de acordo com a equivalência escolhida.

Acrescente a nova equivalência obtida à sequência:

$$\varphi$$
é equivalente a
$$\varphi_1$$

(3) Escolha uma equivalência adequada e transforme φ_1 em um novo enunciado φ_2, transformando φ_1 de acordo com a equivalência escolhida.

Acrescente a nova equivalência obtida à sequência:

$$\varphi$$
é equivalente a
$$\varphi_1$$
é equivalente a
$$\varphi_2$$

(4) Repita este procedimento de escolher uma equivalência adequada e modificar o enunciado já obtido, até chegar em ψ, acrescentando, a cada passo, a nova equivalência obtida à sequência.

Qualquer equivalência pode ser aplicada na execução deste processo, mas algumas são mais frequentemente utilizadas do que outras. Dentre estas algumas das mais importantes são:

Equivalência	Nome da equivalência
$(\varphi \vee \psi) \vee \theta$ e $\varphi \vee (\psi \vee \theta)$	Associatividade do $\vee$
$(\varphi \wedge \psi) \wedge \theta$ e $\varphi \wedge (\psi \wedge \theta)$	Associatividade do $\wedge$
$\varphi \vee \psi$ e $\psi \vee \varphi$	Comutatividade do $\vee$
$\varphi \wedge \psi$ e $\psi \wedge \varphi$	Comutatividade do $\wedge$
$\varphi \vee \varphi$ e φ	Idempotência do $\vee$
$\varphi \wedge \varphi$ e φ	Idempotência do $\wedge$
$\varphi \wedge (\varphi \vee \psi)$ e φ	Absorção do $\vee$ pelo $\wedge$
$\varphi \vee (\varphi \wedge \psi)$ e φ	Absorção do $\wedge$ pelo $\vee$
$\varphi \vee (\psi \wedge \theta)$ e $(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \theta)$	Distributividade do $\vee$ sobre o $\wedge$
$\varphi \wedge (\psi \vee \theta)$ e $(\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \theta)$	Distributividade do $\wedge$ sobre o $\vee$
$\neg(\varphi \vee \psi)$ e $(\neg\varphi) \wedge (\neg\psi)$	Lei de De Morgan
$\neg(\varphi \wedge \psi)$ e $(\neg\varphi) \vee (\neg\psi)$	Lei de De Morgan
$(\varphi \wedge \neg\varphi) \vee \psi$ e ψ	Elemento neutro do $\vee$
$(\varphi \vee \neg\varphi) \wedge \psi$ e ψ	Elemento neutro do $\wedge$
$(\varphi \vee \neg\varphi) \vee \psi$ e $(\varphi \vee \neg\varphi)$	Elemento zero do $\vee$
$(\varphi \wedge \neg\varphi) \wedge \psi$ e $(\varphi \wedge \neg\varphi)$	Elemento zero do $\wedge$
$\neg(\neg\varphi)$ e φ	Negação do $\neg$
$\neg(\varphi \rightarrow \psi)$ e $\varphi \wedge (\neg\psi)$	Negação do $\rightarrow$
$\neg(\varphi \leftrightarrow \psi)$ e $(\varphi \wedge (\neg\psi)) \vee ((\neg\varphi) \wedge \psi)$	Negação do $\leftrightarrow$
$\varphi \leftrightarrow \psi$ e $(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$	Definição do $\leftrightarrow$
$\varphi \rightarrow \psi$ e $(\neg\varphi) \vee \psi$	Definição do $\rightarrow$

Para se familiarizar com esta tabela, sugerimos que você verifique cada equivalência, usando o Método das Tabelas para Equivalências.

Vamos, agora, ver alguns exemplos de aplicação do processo de transformar um enunciado em outro por meio de equivalências, que é uma das habilidades essenciais que um estudante de Matemática deve possuir.

Exemplo 1 (a) Os enunciados $p \wedge (p \rightarrow q)$ e $p \wedge q$ são equivalentes.

De fato, temos:

$$p \wedge (p \rightarrow q)$$

é equivalente a

$$p \wedge (\neg p \vee q)$$

é equivalente a

$$(p \wedge \neg p) \vee (p \wedge q)$$

é equivalente a

$$p \wedge q$$

Nos passos acima, usamos as seguintes equivalências, respectivamente:

(1) Definição do $\rightarrow$,
(2) Distributividade do $\wedge$ sobre o $\vee$,
(3) Elemento neutro do $\vee$.

(b) Os enunciados $p \rightarrow (p \wedge q)$ e $\neg p \vee q$ são equivalentes.
De fato, temos:

$$p \rightarrow (p \wedge q)$$

é equivalente a

$$\neg p \vee (p \wedge q)$$

é equivalente a

$$(\neg p \vee p) \wedge (\neg p \vee q)$$

é equivalente a

$$\neg p \vee q$$

Nos passos acima, usamos as seguintes equivalências, respectivamente:

(1) Definição do $\rightarrow$,
(2) Distributividade do $\vee$ sobre o $\wedge$,
(3) Elemento neutro do $\wedge$.

(c) Os enunciados $(p \wedge q) \rightarrow r$ e $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ são equivalentes.
De fato, temos:

$$(p \wedge q) \rightarrow r$$

é equivalente a

$$\neg(p \wedge q) \vee r$$

é equivalente a

$$(\neg p \vee \neg q) \vee r$$

é equivalente a

$$\neg p \vee (\neg q \vee r)$$

é equivalente a

$$\neg p \vee (q \to r)$$

é equivalente a

$$p \to (q \to r)$$

Nos passos acima, usamos as seguintes equivalências, respectivamente:

(1) Definição do $\to$,
(2) Lei de De Morgan,
(3) Associatividade do $\vee$,
(4) Definição do $\to$,
(5) Definição do $\to$.

(d) Os enunciados $\{[((p \wedge q) \wedge r)] \vee [(\neg p \wedge (q \wedge r))]\} \vee (p \wedge (\neg q \wedge r))$ e $(p \vee q) \wedge r$ são equivalentes.

De fato, temos:

$$\{[((p \wedge q) \wedge r)] \vee [(\neg p \wedge (q \wedge r))]\} \vee (p \wedge (\neg q \wedge r))$$

é equivalente a

$$\{[(p \wedge (q \wedge r)] \vee [(\neg p \wedge (q \wedge r))]\} \vee (p \wedge (\neg q \wedge r))$$

é equivalente a

$$[(p \vee \neg p) \wedge (q \wedge r)] \vee (p \wedge (\neg q \wedge r))$$

é equivalente a

$$(q \wedge r) \vee (p \wedge (\neg q \wedge r))$$

é equivalente a

$$(q \wedge r) \vee ((p \wedge \neg q) \wedge r)$$

é equivalente a

$$(q \vee (p \wedge \neg q)) \wedge r$$

é equivalente a

$$(q \vee p) \wedge (q \vee \neg q) \wedge r$$

é equivalente a

$$(q \vee p) \wedge r$$

é equivalente a

$$(p \vee q) \wedge r$$

Nos passos acima, usamos as seguintes equivalências, respectivamente:

(1) Associatividade do $\wedge$,
(2) Distributividade do $\wedge$ sobre o $\vee$,
(3) Elemento neutro do $\wedge$,
(4) Associatividade do $\wedge$,
(5) Distributividade do $\wedge$ sobre o $\vee$,
(6) Distributividade do $\vee$ sobre o $\wedge$,
(7) Elemento neutro do $\wedge$,
(8) Comutatividade do $\vee$.

1.1 Observação

Observação 1 Algumas das equivalências usuais que são empregadas na transformação de enunciados equivalentes têm interpretações intuitivas imediatas:

– *Associatividade do* $\vee$: garante que uma disjunção com vários componentes que são disjunções podem ser escritas sem os parênteses ou, melhor ainda, com qualquer colocação de parênteses.

– *Associatividade do* $\wedge$: garante que uma conjunção de conjunções pode ser escrita sem os parênteses, ou, melhor ainda, com qualquer colocação de parênteses.

– *Comutatividade do* $\vee$: garante que a ordem em que os componentes de uma disjunção são escritos não é relevante na determinação do valor da disjunção.

– *Comutatividade do* $\wedge$: garante que a ordem em que os componentes de uma conjunção são escritos não é relevante na determinação do valor da disjunção.

– *Idempotência do* $\vee$: garante que podemos eliminar ocorrências repetidas de componentes em uma disjunção.

– *Idempotência do* $\wedge$: garante que podemos eliminar ocorrências repetidas de componentes em uma conjunção.

– *Distributividade* $\vee$ *sobre o* $\wedge$: garante que uma lei análoga a *distributividade da multiplicação sobre a adição* — ou seja, $x \cdot (y+z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$, que vale para os números — vale para os enunciados, quando $\cdot$ é interpretada como $\vee$ e $+$ é interpretada como $\wedge$.

– *Distributividade* $\wedge$ *sobre o* $\vee$: garante que uma lei análoga a *distributividade da multiplicação sobre a adição* — ou seja, $x \cdot (y+z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$, que vale para todos os números — vale para os enunciados, quando $\cdot$ é interpretada como $\wedge$ e $+$ é interpretada como $\vee$.

– *Elemento neutro do* $\vee$: garante que componentes da forma $\varphi \wedge \neg\varphi$ podem ser eliminados das disjunções. Observe a semelhança desta equivalência com a lei $0 + x = x$, que vale para todos os números.

– *Elemento neutro do* $\wedge$: garante que componentes da forma $\varphi \vee \neg\varphi$ podem ser eliminados das conjunções. Observe a semelhança desta equivalência com a lei $1 \cdot x = x$, que vale para todos os números.

– *Elemento zero do* $\vee$: garante que componentes da forma $\varphi \vee \neg\varphi$ eliminam os outros componentes das disjunções. Observe a semelhança desta equivalência com a lei $0 \cdot x = 0$, que vale para todos os números.

– *Elemento zero do* $\wedge$: garante que componentes da forma $\varphi \wedge \neg\varphi$ eliminam os outros componentes das conjunções. Observe a semelhança desta equivalência com a lei $0 \cdot x = 0$, que vale para todos os números.

1.2 Exercícios

Exercício 1 Mostre que os seguintes enunciados são equivalentes, usando sequências de equivalências:

(i) $\neg\neg[\neg(p \vee \neg q)]$ e $\neg p \wedge q$
(ii) $\neg(p \wedge q)$ e $q \rightarrow \neg p$
(iii) $\neg[(p \vee q) \wedge r]$ e $(\neg p \vee \neg r) \wedge (\neg q \vee \neg r)$
(iv) $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ e $q \rightarrow (p \rightarrow r)$
(v) $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ e $\neg r \rightarrow (p \rightarrow \neg q)$
(vi) $p \rightarrow (q \rightarrow (p \wedge q))$ e $\neg p \vee p$
(vii) $\neg[p \rightarrow (q \wedge r)]$ e $(p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg r)$
(viii) $\neg[(p \wedge q) \wedge r]$ e $p \rightarrow (q \rightarrow \neg r)$

Exercício 2 Mostre que $\neg(\varphi \wedge \psi \wedge \theta)$ e $(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \neg\theta$ são equivalentes, usando sequência de equivalências.

Exercício 3 Considere o enunciado:

> Se f é contínua e diferenciável em $[a, b]$, então a reta r passa por um ponto entre a e b e é tangente a f ou não é o caso que ambos a e b são iguais a 0.

(i) Determine uma legenda para o enunciado, considerando que ele é formado a partir de seis enunciados atômicos.

(ii) Simbolize o enunciado de acordo com a legenda.

(iii) Determine a negação do enunciado por meio de equivalências, usando uma vez a equivalência do Exercício 2.

(iv) Admitindo que a negação do enunciado é F, podemos concluir que a reta r passa por um ponto entre a e b?

Antes de ler as resoluções, tente resolver os exercícios usando os conceitos estudados.

***Resolução do Exercício 1*:** (i) $\neg\neg[\neg(p \vee \neg q)]$ equivalente a $\neg(p \vee \neg q)$, equivalente a $\neg p \wedge \neg\neg q$, equivalente a $\neg p \wedge q$. (**Determine a equivalência que foi usada em cada passo!**) (ii) $\neg(p \wedge q)$ equivalente a $\neg p \vee \neg q$, equivalente a $\neg q \vee \neg p$, equivalente a $q \to \neg p$. (**Determine a equivalência que foi usada em cada passo!**) (iii) $\neg[(p \vee q) \wedge r]$ equivalente a $\neg[(p \wedge r) \vee (q \wedge r)]$, equivalente a $\neg(p \wedge r) \vee \neg(q \wedge r)$, equivalente a $(\neg p \vee \neg r) \wedge (\neg q \vee \neg r)$. (**Determine a equivalência que foi usada em cada passo!**) Outra resolução: $\neg[(p \vee q) \wedge r]$ equivalente a $\neg(p \vee q) \vee \neg r$, equivalente a $(\neg p \wedge \neg q) \vee \neg r$, equivalente a $(\neg p \vee \neg r) \wedge (\neg q \vee \neg r)$. (**Determine a equivalência que foi usada em cada passo!**) (iv) $p \to (q \to r)$ equivalente a $\neg p \vee (q \to r)$, equivalente a $\neg p \vee (\neg q \vee r)$, equivalente a $(\neg p \vee \neg q) \vee r)$, equivalente a $\neg q \vee \neg p \vee r)$, equivalente a $\neg q \vee (p \to r)$, equivalente a $q \to (p \to r)$. (**Determine a equivalência que foi usada em cada passo!**) (v) $p \to (q \to r)$ equivalente a $\neg p \vee (q \to r)$, equivalente a $\neg p \vee (\neg q \vee r)$, equivalente a $(\neg q \vee r) \vee \neg p$, equivalente a $(r \vee \neg q) \vee \neg p$, equivalente a $r \vee (\neg q \vee \neg p)$, equivalente a $r \vee (\neg p \vee \neg q)$, equivalente a $r \vee (p \to \neg q)$, equivalente a $\neg\neg r \vee (p \to \neg q)$, equivalente a $\neg r \to (p \to \neg q)$. (**Determine a equivalência que foi usada em cada passo!**) (vi) $p \to (q \to (p \wedge q))$ equivalente a $\neg p \vee (q \to (p \wedge q))$, equivalente a $\neg p \vee (\neg q \vee (p \wedge q))$, equivalente a $\neg p \vee [(\neg q \vee p) \wedge (\neg q \vee q)]$, equivalente a $\neg p \vee (\neg q \vee p)$, equivalente a $(\neg p \vee \neg q) \vee (\neg p \vee p)$, equivalente a $\neg p \vee p$. (**Determine a equivalência que foi usada em cada passo!**) (vii) $\neg[p \to (q \wedge r)]$ equivalente a $p \wedge \neg(q \wedge r)$, equivalente a $p \wedge [(\neg q) \vee (\neg r)]$, equivalente a $(p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg r)$. (**Determine a equivalência que foi usada em cada passo!**) Outra maneira um pouco mais complicada de obter o mesmo resultado: $\neg[p \to (q \wedge r)]$ equivalente a $\neg[(\neg p) \vee (q \wedge r)]$, equivalente a $\neg\{[(\neg p) \vee q] \wedge [(\neg p) \vee r]\}$, equivalente a $\{\neg[(\neg p) \vee q]\} \vee \{\neg[(\neg p) \vee r]\}$, equivalente a $[(\neg\neg p) \wedge (\neg q)] \vee [(\neg\neg p) \wedge (\neg r)]$, equivalente a $(p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg r)$. (**Determine a equivalência que foi usada em cada passo!**) (viii) $\neg[(p \wedge q) \wedge r]$ equivalente a $[\neg(p \wedge q)] \vee [\neg r]$, equivalente a $[(\neg p) \vee (\neg q)] \vee [\neg r]$, equivalente a $[\neg p] \vee [(\neg q) \vee (\neg r)]$, equivalente a $[\neg p] \vee [q \to (\neg r)]$, equivalente a $p \to (q \to \neg r)$. (**Determine a equivalência que foi usada em cada passo!**) ***Resolução do Exercício ??*:** $\neg(\varphi \wedge \psi \wedge \theta)$ equivalente a $\neg[(\varphi \wedge \psi) \wedge \theta]$, equivalente a $[\neg(\varphi \wedge \psi)] \vee (\neg\theta)$, equivalente a $(\varphi \wedge \psi) \to \neg\theta$. **Há, possivelmente, outras maneiras de resolvermos esta questão.** ***Resolução do Exercício 3*:** (i) Reescrita: se [(f é contínua em $[a, b]$) e (f é diferenciável em $[a, b]$)], então $\langle$ [(a reta r passa por um ponto entre a e b) e (a reta r é tangente a f)] ou { não [(a é igual a 0) e (b é igual a 0)] } $\rangle$. Legenda:

c	:	f é contínua em $[a, b]$
d	:	f é diferenciável em $[a, b]$
p	:	a reta r passa por um ponto entre a e b
t	:	a reta r é tangente a f
a	:	a é igual a 0
b	:	b é igual a 0.

Simbolização: $(c \wedge d) \to [(p \wedge t) \vee \neg(a \wedge b)]$. (ii) $\neg\{(c \wedge d) \to [(p \wedge t) \vee \neg(a \wedge b)]\}$ equivalente a $(c \wedge d) \wedge \neg[(p \wedge t) \vee \neg(a \wedge b)]\}$ equivalente a $(c \wedge d) \wedge \neg[\neg(a \wedge b) \vee (p \wedge t)]\}$ equivalente a $(c \wedge d) \wedge \neg[(a \wedge b) \to (p \wedge t)]\}$ equivalente a $(c \wedge d) \wedge \neg[(a \wedge b) \to \neg\neg(p \wedge t)]\}$ equivalente a $(c \wedge d) \wedge \neg[(a \wedge b \wedge \neg(p \wedge t)]\}$. **Há, possivelmente, outras maneiras de resolvermos este item.** (iii) Se a negação é F, o enunciado é V. Tomando $c : F$ e $p : F$, temos $c \wedge d : F$. Daí, $(c \wedge d) \to [(p \wedge t) \vee \neg(a \wedge b)] : V$. Por outro lado, tomando $c : V$, $d : F$, $p : V$ e $t : V$, temos $c \wedge d : V$ e $p \wedge t : V$. Daí, $(c \wedge d) \to [(p \wedge t) \vee \neg(a \wedge b)] : V$. Logo, a reta r pode ou não passar por um ponto entre a e b.

2 Um exemplo mais elaborado

Agora que vimos como sequências de enunciados equivalentes podem ser usadas para transformar um enunciado em outro, podemos aplicá-las na resolução de problemas que têm um sentido prático. Vamos exemplificar esta situação analisando um problema que tem por objetivo simplificar uma informação confusa.

À primeira vista, este exemplo pode parecer um pouco elaborado, mas não se preocupe se você não entender todos os detalhes e explicações apresentadas, em uma primeira leitura. Lembre-se: ele estará sempre aqui para ser revisado quando você tiver mais maturidade matemática.

Além disso, com o passar do tempo e estudo, o que parece difícil vai se tornando mais fácil...

2.1 O segredo da longevidade

Ao ser perguntado sobre o segredo da longevidade, um ancião disse:

É só seguir uma dieta estrita.
Se eu não bebo cerveja no jantar, eu sempre como peixe.
Quando eu bebo cerveja e como peixe no jantar, eu não tomo sorvete.
Além disso, se eu tomo sorvete ou não bebo cerveja, eu nunca como peixe.

Será que podemos simplificar esta explicação confusa, de modo a entender o que o ancião realmente quis dizer?

Esta questão pode ser resolvida pela aplicação de equivalências, da maneira a seguir.

Consideremos a legenda:

c : eu bebo cerveja
p : eu como peixe
s : eu tomo sorvete

Baseados nesta legenda, podemos simbolizar os enunciados ditos pelo ancião, respectivamente, como:

$$\neg c \to p$$
$$c \land p \to \neg s$$
$$s \lor \neg c \to \neg p$$

Agora, observamos que o que foi dito pelo ancião corresponde à conjunção destes três enunciados simbolizados, ou seja:

$$[\neg c \to p] \land [c \land p \to \neg s] \land [s \lor \neg c \to \neg p]$$

Mas esta conjunção pode ser simplificada do seguinte modo, onde, como é usual, não explicitamos as aplicações nem da Associatividade do $\lor$, nem da Associatividade do $\land$.

Pela Definição do $\to$, obtemos:

$$[\neg\neg c \lor p] \land [\neg(c \land p) \lor \neg s] \land [\neg(s \lor \neg c) \lor \neg p]$$

Pela Negação do $\neg$ e pelas Leis de De Morgan, obtemos:

$$[c \vee p] \wedge [\neg c \vee \neg p \vee \neg s] \wedge [(\neg s \wedge \neg\neg c) \vee \neg p]$$

Agora, pela Negação do $\neg$, pela Comutatividade do $\wedge$ e pela Comutatividade do $\vee$, obtemos:

$$[c \vee p] \wedge [\neg c \vee \neg p \vee \neg s] \wedge [\neg p \vee (c \wedge \neg s)]$$

Pela Distributividade do $\vee$ sobre o $\wedge$, aplicada ao último componente, obtemos:

$$[c \vee p] \wedge [\neg c \vee \neg p \vee \neg s] \wedge [\neg p \vee c] \wedge [\neg p \vee \neg s]$$

Pela Comutatividade do $\wedge$ e pela Comutatividade do $\vee$, este último enunciado pode ser re-escrito como:

$$[c \vee p] \wedge [\neg c \vee \neg p \vee \neg s] \wedge [\neg p \vee \neg s] \wedge [c \vee \neg p]$$

Agora, temos uma parte um pouco mais intrincada do processo, que consiste em observar que a disjunção $\neg c \vee \neg p \vee \neg s$ (segundo componente) contém a disjunção $\neg p \vee \neg s$ (terceiro componente) como componente. Assim, pela Absorção do $\vee$ pelo $\wedge$, obtemos:

$$[c \vee p] \wedge [\neg p \vee \neg s] \wedge [c \vee \neg p]$$

Podemos, agora, aplicar a Distributividade do $\wedge$ sobre o $\vee$ diversas vezes, para obter a seguinte disjunção:

$$\begin{array}{lcll}
(c \wedge \neg p \wedge c) & \vee & (c \wedge \neg p \wedge \neg p) & \vee \\
(c \wedge \neg s \wedge c) & \vee & (c \wedge \neg s \wedge \neg p) & \vee \\
(p \wedge \neg p \wedge c) & \vee & (p \wedge \neg p \wedge \neg p) & \vee \\
(p \wedge \neg s \wedge c) & \vee & (p \wedge \neg s \wedge \neg p) &
\end{array}$$

Este passo também é um pouco intrincado, mas é análogo ao que fazemos na *Álgebra dos Números*, quando passamos da expressão

$$(a + b)(c + d)(e + f)$$

para a expressão

$$(ace) + (acf) + (ade) + (adf) + (bce) + (bcf) + (bde) + (bdf)$$

baseados na *distributividade da multiplicação sobre a adição.*

Agora, pela Comutatividade do $\wedge$ e pela Idempotência do $\wedge$, obtemos:

$$\begin{array}{lcll}
(c \wedge \neg p) & \vee & (c \wedge \neg p) & \vee \\
(c \wedge \neg s) & \vee & (c \wedge \neg p \wedge \neg s) & \vee \\
(c \wedge p \wedge \neg p) & \vee & (p \wedge \neg p) & \vee \\
(c \wedge p \wedge \neg s) & \vee & (p \wedge \neg p \wedge \neg s) &
\end{array}$$

Pela Idempotência do $\vee$, podemos eliminar as repetições que foram criadas e, pelo Elemento Neutro do $\vee$, podemos eliminar os componentes que possuem ocorrências de um enunciado atômico e sua negação. Assim, obtemos:

$$\begin{array}{lcll}
(c \wedge \neg p) & \vee & & \\
(c \wedge \neg s) & \vee & (c \wedge \neg s \wedge \neg p) & \vee \\
(c \wedge p \wedge \neg s) & & &
\end{array}$$

Novamente, temos uma parte um pouco intrincada do processo, que consiste na re-escrita do enunciado, pela Comutatividade do $\wedge$ e pela Comutatividade do $\vee$, de modo a prepará-lo para a aplicação da Absorção do $\wedge$ pelo $\vee$:

$$(c \wedge \neg p) \vee (c \wedge \neg p \wedge \neg s) \vee (c \wedge \neg s) \vee (c \wedge \neg s \wedge p)$$

Observe que a conjunção $c \wedge \neg p \wedge \neg s$ (segundo componente) contém a conjunção $c \wedge \neg p$ (primeiro componente) como componente. E que a conjunção $c \wedge \neg s \wedge p$ (quarto componente) contém a conjunção $c \wedge \neg s$ (terceiro componente) como componente.

Assim, pela Absorção do $\wedge$ pelo $\vee$, obtemos:

$$(c \wedge \neg p) \vee (c \wedge \neg s)$$

Desta maneira, concluímos que o que ancião queria dizer é:

eu bebo cerveja e não como peixe, ou bebo cerveja e não tomo sorvete

Parece, então, que o segredo da longevidade é a cerveja!

3 Negação de enunciados atômicos

Uma das habilidades básicas que um estudante de Matemática deve possuir é a de reescrever a negação de enunciados. Vamos, agora, estudar um pouco este aspecto da Linguagem Matemática. Nesta seção, vamos tratar da negação de enunciados atômicos. A negação de enunciados moleculares é o assunto da Seção 4.

Primeiramente, vamos, discutir algumas peculiaridades da negação que influenciam diretamente a negação de enunciados atômicos.

(1) Considerar que um enunciado tem um significado negativo pode depender, e muito, do contexto no qual ele está inserido.

Exemplo 2 Um resultado negativo pode ser, na verdade, um resultado positivo, como no caso do resultado de um exame de uma doença.

Por exemplo, o enunciado

o exame de sangue deu negativo para a enfermidade

que pode ser considerado como a negação de

o exame de sangue deu positivo para a enfermidade

tem, na verdade, um significado positivo.

(2) Muitas vezes, a negação de um enunciado é feita por uma pequena modificação em alguma palavra que ocorre no enunciado que está sendo negado.

Exemplo 3 A negação de

ele é aprovado no teste

pode ser "escrita atômicamente" como

ele é reprovado no teste

dado que, como todos sabem, a negação de

ser aprovado

é

ser reprovado

(3) Muitas vezes, as negações são formadas pela colocação de certos prefixos bem definidos junto a alguma palavra que ocorre no enunciado que está sendo negado. Mas devemos tomar cuidado quando tentamos classificar um enunciado como uma negação apenas pela ocorrência de um desses "prefixos de negação", pois muitas vezes estas partículas são usadas em outro sentido.

Exemplo 4 O prefixo

in

na frase

João é infeliz

indica uma negação.

Por outro lado, o enunciado

Carolina ingeriu a comida

não é a negação de

Carolina geriu a comida.

(4) Em Matemática, além do uso do conectivo

não

a negação é feita pelo emprego de certas convenções sobre como os símbolos são usados no discurso matemático.

Exemplo 5 Em Matemática, é comum negarmos uma proposição que envolve um símbolo especial, riscando o símbolo com barras como $/$ ou $|$.

A tabela abaixo relaciona a negação de certos símbolos que representam conceitos bem conhecidos e utilizados no discurso matemático. O significado e o uso de alguns destes símbolos serão estudados mais detalhadamente nas próximas aulas.

conceito	símbolo	negação
pertinência	$\in$	$\notin$
inclusão	$\subseteq$	$\not\subseteq$
igualdade	$=$	$\neq$
precedência	$<$	$\geq$
sucessão	$>$	$\leq$

3.1 Observação

Observação 2 A negação de enunciados atômicos depende fortemente da maneira como interpretamos o enunciado, mas é guiada por certos padrões usuais da Linguagem Matemática. Estes padrões são adquiridos com estudo (e maturidade).

3.2 Exercício

Exercício 4 Escreva a negação de cada enunciado abaixo:

(i)	1 é primo	(ii)	$x \in \mathbb{N}$
(iii)	10 é múltiplo de 2	(iv)	$\frac{1}{2} \in A$
(v)	2 e 4 são primos entre si	(vi)	$\{1, 2\} \subseteq \mathbb{N}$
(vii)	$\mathbb{N}$ é infinito	(viii)	$2^{10} < 10^2$
(ix)	$C(8, 3)$ é igual a $C(3, 8)$	(x)	$P(A) > 1$

Antes de ler a resolução, tente resolver o exercício usando os conceitos estudados.

***Resolução do Exercício 4*: A negação de enunciados atômicos é fortemente apoiada em convenções matemáticas. Este exercício deixa isto claro.** (i) Negação: 1 não é primo. Se pode ou não ser escrito como 1 é composto depende da convenção matemática adotada. (ii) Negação: $x \notin \mathbb{N}$. (iii) Negação: 10 não é múltiplo de 2. Pode ser escrito como 2 não divide 10 ou, ainda, como 2 não é fator de 10. (iv) Negação: $\frac{1}{2} \notin A$. (v) Negação: 2 e 4 não são primos entre si. Observe as diferenças entre os enunciados 2 e 4 são primos entre si e 2 e 4 são primos. (vi) Negação: $\{1, 2\} \not\subseteq \mathbb{N}$. (vii) Negação: $\mathbb{N}$ não é finito. Pode (e deve) ser escrito como $\mathbb{N}$ é finito. (viii) Negação: $2^{10} \geq 10^2$. Pode ser escrito como $10^2 \leq 2^{10}$. (ix) Negação: $C(8, 3)$ não é igual a $C(3, 8)$. Pode ser escrito como $C(8, 3) \neq C(3, 8)$. (x) Negação: $P(A) \leq 1$. Pode ser escrito como $1 \geq P(A)$.

4 Negação de enunciados moleculares

Vamos, agora, tratar da negação de enunciados moleculares.

O problema de negar um enunciado molecular φ tem uma solução trivial: basta escrever o símbolo $\neg$ na frente do enunciado, obtendo $\neg\varphi$, ou $\neg(\varphi)$, quando os parênteses forem necessários.

Por exemplo, estritamente falando, a negação de

todos os alunos devem se matricular em Matemática Discreta (1)

é, simplesmente:

$\neg$(todos os alunos devem se matricular em Matemática Discreta) (2)

Mas, quando falamos em negar um enunciado molecular, não estamos falando em negar no sentido estrito. <u>O que queremos, na verdade, é um enunciado equivalente</u>

à negação, que nos transmita alguma informação mais adequada do que a obtida simplesmente pela colocação de uma ocorrência do símbolo $\neg$ na frente do enunciado negado.

Por exemplo, uma maneira de reescrever a negação de (1) é

alguns alunos não precisam se matricular em Matemática Discreta

que é muito mais informativo do que (2).

Assim, parte do trabalho envolvido no problema de negar um enunciado molecular é reescrever a negação de uma maneira adequada. Como veremos, os enunciados equivalentes são uma ferramenta útil para este fim.

Negação da negação

Uma negação $\neg\varphi$ tem a tabela:

φ	$\neg\varphi$
V	F
F	V.

Assim, a negação de uma negação, $\neg(\neg\varphi)$, tem a tabela:

φ	$\neg\varphi$	$\neg(\neg\varphi)$
V	F	V
F	V	F.

Observe que φ e $\neg(\neg\varphi)$ têm exatamente os mesmos valores nas mesmas interpretações. Isto mostra que $\neg(\neg\varphi)$ é *equivalente* à própria φ.

Exemplo 6 A negação de

não é o caso que 2 não é ímpar

é equivalente a

2 é ímpar.

Negação da conjunção

Uma conjunção $\varphi \wedge \psi$ tem a tabela:

φ	ψ	$\varphi \wedge \psi$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F.

Assim, a negação de uma conjunção, $\neg(\varphi \wedge \psi)$, tem a tabela:

φ	ψ	$\varphi \wedge \psi$	$\neg(\varphi \wedge \psi)$
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V.

Observe que a negação de uma conjunção $\neg(\varphi \wedge \psi)$ é V exatamente nos casos em que ao menos uma das duas proposições φ e ψ é F. Isto mostra que $\neg(\varphi \wedge \psi)$ é *equivalente* a $(\neg\varphi) \vee (\neg\psi)$, o que fica mais evidente quando construímos a tabela de $(\neg\varphi) \vee (\neg\psi)$:

φ	ψ	$\neg\varphi$	$\neg\psi$	$(\neg\varphi) \vee (\neg\psi)$
V	V	F	F	F
V	F	F	V	V
F	V	V	F	V
F	F	V	V	V.

Observe que $\neg(\varphi \wedge \psi)$ e $(\neg\varphi) \vee (\neg\psi)$ têm exatamente os mesmos valores nas mesmas interpretações. Isto mostra que $\neg(\varphi \wedge \psi)$ é *equivalente* a $(\neg\varphi) \vee (\neg\psi)$.

Exemplo 7 A negação de

x é par e x é quadrado perfeito

é equivalente a

x não é par ou x não é quadrado perfeito.

Negação da disjunção

Uma disjunção $\varphi \vee \psi$ tem a tabela:

φ	ψ	$\varphi \vee \psi$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F.

Assim, a negação de uma disjunção, $\neg(\varphi \vee \psi)$, tem a tabela:

φ	ψ	$\varphi \vee \psi$	$\neg(\varphi \vee \psi)$
V	V	V	F
V	F	V	F
F	V	V	F
F	F	F	V.

Observe que a negação de uma disjunção $\neg(\varphi \vee \psi)$ é V exatamente no caso em que ambas as proposições φ e ψ são F. Isto mostra que $\neg(\varphi \vee \psi)$ é *equivalente* a $(\neg\varphi) \wedge (\neg\psi)$, o que fica mais evidente quando construímos a tabela de $(\neg\varphi) \wedge (\neg\psi)$:

φ	ψ	$\neg\varphi$	$\neg\psi$	$(\neg\varphi) \wedge (\neg\psi)$
V	V	F	F	F
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V.

Observe que em cada caso $\neg(\varphi \vee \psi)$ e $(\neg\varphi) \wedge (\neg\psi)$ têm exatamente os mesmos valores nas mesmas interpretações. Isto mostra que $\neg(\varphi \vee \psi)$ é *equivalente* a $(\neg\varphi) \wedge (\neg\psi)$.

Exemplo 8 A negação de

x é par ou x é ímpar

é equivalente a

x não é par e x não é ímpar.

Negação da implicação

Uma implicação $\varphi \to \psi$ tem a tabela:

φ	ψ	$\varphi \to \psi$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V.

Assim, a negação de uma implicação, $\neg(\varphi \to \psi)$, tem a tabela:

φ	ψ	$\varphi \to \psi$	$\neg(\varphi \to \psi)$
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	V	F
F	F	V	F.

Observe que a negação de uma implicação $\neg(\varphi \to \psi)$ é V exatamente no caso em que a proposição φ é V e a proposição ψ é F. Isto mostra que $\neg(\varphi \to \psi)$ é *equivalente* a $\varphi \wedge (\neg\psi)$, o que fica mais evidente quando construímos a tabela de $\varphi \wedge (\neg\psi)$:

φ	ψ	$\neg\psi$	$\varphi \wedge (\neg\psi)$
V	V	F	F
V	F	V	V
F	V	F	F
F	F	V	F.

Observe que $\neg(\varphi \to \psi)$ e $\varphi \wedge (\neg\psi)$ têm exatamente os mesmos valores nas mesmas interpretações. Isto mostra que $\neg(\varphi \to \psi)$ é *equivalente* a $\varphi \wedge (\neg\psi)$.

Exemplo 9 A negação de

se x é par, então x^2 é par

é equivalente a

x é par e x^2 não é par,

que pode ser reescrita como

x é par e x^2 é ímpar.

Negação da bi-implicação

Uma bi-implicação $\varphi \leftrightarrow \psi$ tem a tabela:

φ	ψ	$\varphi \leftrightarrow \psi$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	$V.$

Assim, a negação de uma bi-implicação, $\neg(\varphi \leftrightarrow \psi)$, tem a tabela:

φ	ψ	$\varphi \leftrightarrow \psi$	$\neg(\varphi \leftrightarrow \psi)$
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	V	$F.$

Observe que a negação de uma bi-implicação $\neg(\varphi \leftrightarrow \psi)$ é V exatamente nos casos em que as proposições φ e ψ possuem valores opostos (observe a segunda e a terceira linhas da tabela acima, descontando a linha de referência). Isto mostra que $\neg(\varphi \leftrightarrow \psi)$ é *equivalente* a $(\varphi \wedge (\neg\psi)) \vee ((\neg\varphi) \wedge \psi)$. Isto fica mais evidente quando construímos a tabela de $(\varphi \wedge (\neg\psi)) \vee ((\neg\varphi) \wedge \psi)$:

φ	ψ	$\neg\varphi$	$\neg\psi$	$\varphi \wedge (\neg\psi)$	$(\neg\varphi) \wedge \psi$	$[\varphi \wedge (\neg\psi)] \vee [(\neg\varphi) \wedge \psi]$
V	V	F	F	F	F	F
V	F	F	V	V	F	V
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	F	F	$F.$

Observe que $\neg(\varphi \leftrightarrow \psi)$ e $(\varphi \wedge (\neg\psi)) \vee ((\neg\varphi) \wedge \psi)$ têm exatamente os mesmos valores nas mesmas interpretações. Isto mostra que $\neg(\varphi \leftrightarrow \psi)$ é *equivalente* a $(\varphi \wedge (\neg\psi)) \vee ((\neg\varphi) \wedge \psi)$.

Exemplo 10 A negação de

x é primo se, e somente se, x possui fatores próprios

é equivalente a (observe os parênteses e a vírgula)

> x é primo e (não (x possui fatores próprios)), ou (não (x é primo)) e x possui fatores próprios,

que pode ser reescrita como

> x é primo e x não possui fatores próprios, ou x não é primo e x possui fatores próprios.

□

Também podemos obter o enunciado $(\varphi \wedge (\neg\psi)) \vee ((\neg\varphi) \wedge \psi)$ a partir do enunciado $\neg(\varphi \leftrightarrow \psi)$, usando o nosso conhecimento sobre proposições equivalentes e negação de conjunções e implicações. De fato, de acordo com o Exercício 1.2.1(ii) da Parte 2 do texto da Semana 3, sabemos que $\varphi \leftrightarrow \psi$ é equivalente a $(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$.

Assim, temos:

$$\neg(\varphi \leftrightarrow \psi)$$

é equivalente a

$$\neg[(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)]$$

é equivalente a

$$\neg(\varphi \to \psi) \vee \neg(\psi \to \varphi)$$

é equivalente a

$$(\varphi \wedge \neg\psi) \vee (\psi \wedge \neg\varphi)$$

é equivalente a

$$(\varphi \wedge \neg\psi) \vee (\neg\varphi \wedge \psi).$$

Em cada passagem acima, transformamos um enunciado simbolizado em outro equivalente. Para isto, usamos as seguintes equivalências, respectivamente:

$$\begin{array}{rcl} \varphi \leftrightarrow \psi & \text{e} & (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi) \\ \neg(\varphi \wedge \psi) & \text{e} & \neg\varphi \vee \neg\psi \\ \neg(\varphi \to \psi) & \text{e} & \varphi \wedge \neg\psi \\ \psi \wedge \neg\varphi & \text{e} & \neg\varphi \wedge \psi. \end{array}$$

Observe que na sequência de enunciados obtida acima, quaisquer dois enunciados são equivalentes.

4.1 Observações

Observação 3 Em resumo, temos:

(1) Negar um proposição molecular é reescrever a sua negação de uma maneira mais informativa.

(2) Esta reescrita pode ser feita de maneira sistemática, pelo uso de proposições equivalentes.

(3) As equivalências mais úteis para este fim, são as seguintes:

$$\begin{array}{lll} \neg(\neg\varphi) & \text{e} & \varphi \\ \neg(\varphi \wedge \psi) & \text{e} & (\neg\varphi) \vee (\neg\psi) \\ \neg(\varphi \vee \psi) & \text{e} & (\neg\varphi) \wedge (\neg\psi) \\ \neg(\varphi \to \psi) & \text{e} & \varphi \wedge (\neg\psi) \\ \neg(\varphi \leftrightarrow \psi) & \text{e} & (\varphi \wedge (\neg\psi)) \vee ((\neg\varphi) \wedge \psi). \end{array}$$

4.2 Exercícios

Exercício 5 Escreva a negação de cada enunciado abaixo, do seguinte modo: (a) identifique os enunciados componentes, (b) defina uma legenda, (c) simbolize o enunciado de acordo com a legenda definida, (d) reescreva a negação do enunciado simbolizado através de equivalências e, finalmente, (e) traduza o enunciado obtido ao final do processo de volta para a linguagem natural, de acordo com a legenda definida.

(i) Não é o caso que $1 + 2 > \pi$
(ii) x é irracional
(iii) $2 + 1 = 3$ e $2 - 1 \neq 1$
(iv) ABC é retângulo e DEF é isósceles
(v) x é par ou x é primo
(vi) $x < y$ ou x não é positivo
(vii) Se $\mathbb{N}$ é infinito, então $\mathbb{Z}$ não é finito

(viii) Se A é finito, então $P(A) > 1$
(ix) 2 é par se, e somente se, 2^2 é ímpar
(x) ABC é um triângulo se, e somente se, $\overline{AX}$ e $\overline{BY}$ são colineares

Exercício 6 Escreva a negação de cada enunciado abaixo:

(i) a presidência está sendo exercida com competência e inteligência
(ii) 3 é ímpar e primo, mas 4 não
(iii) x é igual a 1, 2, ou 3
(iv) se a candidata falar a verdade, não será eleita, mas se mentir também não
(iv) se a Presidenta e o Ministro vão ao encontro, o Senador falta
(v) o triângulo de ângulos A, B e C é retângulo se, e somente se, um dos seus ângulos é reto

Antes de ler as resoluçẽs, tente resolver os exercícios usando os conceitos estudados.

***Resolução do Exercício 5*:** (i) Legenda: $p \ : \ 1+2>\pi$. Simbolização: $\neg p$. Negação: $\neg\neg p$, equivalente a p. Reescrita: $1+2>\pi$. (ii) Assumindo que ser irracional é a negação de ser racional. Legenda: $p \ : \ x$ é racional. Simbolização: $\neg p$. Negação: $\neg\neg p$, equivalente a p. Reescrita: x é racional. (iii) Legenda: $\begin{array}{lcl} p & : & 2+1=3 \\ q & : & 2-1=1. \end{array}$ Simbolização: $p\wedge\neg q$. Negação: $\neg(p\wedge\neg q)$, equivalente a $\neg p\vee\neg\neg q$, equivalente a $\neg p\vee q$. Reescrita: $2+1\neq 3$ ou $2-1=1$. Como $\neg p\vee q$ é equivalente a $p\rightarrow q$ **(Verifique esta afirmação!)**, a negação pode ser reescrita como se $2+1=3$, então $2-1=1$. (iv) Legenda: $\begin{array}{lcl} p & : & ABC \text{ é retângulo} \\ q & : & DEF \text{ é isósceles.} \end{array}$ Simbolização: $p\wedge q$. Negação: $\neg(p\wedge q)$, equivalente a $\neg p\vee\neg q$. Reescrita: ABC não é retângulo ou DEF não é isósceles. Como $\neg p\vee\neg q$ é equivalente a $p\rightarrow\neg q$ **(Verifique esta afirmação!)**, a negação pode ser reescrita como se ABC é retângulo, então DEF não é isósceles. (v) Legenda: $\begin{array}{lcl} p & : & x \text{ é par} \\ q & : & x \text{ é primo.} \end{array}$ Simbolização: $p\vee q$. Negação: $\neg(p\vee q)$, equivalente a $\neg p\wedge\neg q$. Reescrita: x não é par e x não é primo. Se soubéssemos que $x\neq 0$ e $x\neq 1$, este enunciado poderia ser reescrito como x é ímpar e x é composto. (vi) Assumindo que $x\geq y$ é a negação de $x<y$, quando x e y são números reais. Legenda: $\begin{array}{lcl} p & : & x<y \\ q & : & x \text{ é positivo.} \end{array}$ Simbolização: $p\vee\neg q$. Negação: $\neg(p\vee\neg q)$, equivalente a $\neg p\wedge\neg\neg q$, equivalente a $\neg p\wedge q$. Reescrita: $x\geq y$ e x é positivo. (vii) Assumindo que ser finito é a negação de ser infinito. Legenda: $\begin{array}{lcl} p & : & \mathbb{N} \text{ é finito} \\ q & : & \mathbb{Z} \text{ é finito.} \end{array}$ Simbolização: $\neg p\rightarrow\neg q$. Negação: $\neg(\neg p\rightarrow\neg q)$, equivalente a $\neg p\wedge\neg\neg q$, equivalente a $\neg p\wedge q$. Reescrita: $\mathbb{N}$ é infinito e $\mathbb{Z}$ é finito. (viii) Assumindo que $x\leq y$ é a negação de $x>y$, quando x e y são números reais. Legenda: $\begin{array}{lcl} p & : & A \text{ é finito} \\ q & : & P(A)>1. \end{array}$ Simbolização: $p\rightarrow q$. Negação: $\neg(p\rightarrow q)$, equivalente a $p\wedge\neg q$. Reescrita: A é finito e $P(A)\leq 1$. (ix) Assumindo que ser ímpar é a negação de ser par. Legenda: $\begin{array}{lcl} p & : & 2 \text{ é par} \\ q & : & 2^2 \text{ é par.} \end{array}$ Simbolização: $p\leftrightarrow\neg q$. Negação: $\neg(p\leftrightarrow\neg q)$, equivalente a $(p\wedge\neg\neg q)\vee(\neg p\wedge\neg q)$, equivalente a $(p\wedge q)\vee(\neg p\wedge\neg q)$. Reescrita: (2 é par e 2^2 é par) ou (2 é ímpar e 2^2 é ímpar). (x) Legenda: $\begin{array}{lcl} p & : & ABC \text{ é um triângulo} \\ q & : & \overline{AX} \text{ e } \overline{BY} \text{ são colineares.} \end{array}$ Simbolização: $p\leftrightarrow q$. Negação: $\neg(p\leftrightarrow q)$, equivalente a $(p\wedge(\neg q))\vee((\neg p)\wedge q)$. Reescrita: ABC é um triângulo e $\overline{AX}$ e $\overline{BY}$ não são colineares; ou ABC não é um triângulo e $\overline{AX}$ e $\overline{BY}$ são colineares. ***Resolução do Exercício 6*:** (i) Reescrita: a presidência está sendo exercida com competência e a presidência está sendo exercida com inteligência. Legenda: $\begin{array}{lcl} c & : & \text{a presidência está sendo exercida com competência} \\ i & : & \text{a presidência está sendo exercida com inteligência.} \end{array}$ Simbolização: $c\wedge i$. Negação: $\neg(c\wedge i)$, equivalente a $(\neg c)\vee(\neg i)$. Reescrita: a presidência não está sendo exercida com competência ou a presidência não está sendo exercida com inteligência. (ii) Reescrita: (3 é ímpar e 3 é primo) e [não (4 é ímpar e 4 é primo)]. Legenda: $\begin{array}{lcl} p & : & 3 \text{ é ímpar} \\ q & : & 3 \text{ é primo} \\ r & : & 4 \text{ é ímpar} \\ s & : & 4 \text{ é primo.} \end{array}$. Simbolização: $(p\wedge q)\wedge\neg(r\wedge s)$. Negação: $\neg[(p\wedge q)\wedge\neg(r\wedge s)]$, equivalente a $[\neg(p\wedge q)]\vee\neg\neg(r\wedge s)$, equivalente a $[(\neg p)\vee(\neg q)]\vee(r\wedge s)$. Reescrita: 3 não é ímpar ou 3 não é primo ou (4 é ímpar e primo). (iii) Reescrita: ($x=1$ ou $x=2$) ou $x=3$. Legenda: $\begin{array}{lcl} u & : & x=1 \\ d & : & x=2 \\ t & : & x=3. \end{array}$. Simbolização: $(u\vee d)\vee t$. Negação: $\neg[(u\vee d)\vee t)]$, equivalente a $\neg(u\vee d)\wedge\neg t$, equivalente a $(\neg u\wedge\neg d)\wedge\neg t$. Reescrita: ($x\neq 1$ e $x\neq 2$) e $x\neq 3$. (iv) Assumindo que faltar ao encontro significa não ir ao encontro. Reescrita: se (a Presidenta vai ao encontro e o Ministro vai ao encontro), então o Senador não vai ao encontro. Legenda:

p	:	a Presidenta vai ao encontro
m	:	o Ministro vai ao encontro
s	:	o Senador vai ao encontro.

Simbolização: $(p \wedge m) \to \neg s$.

Negação: $\neg[(p \wedge m) \to \neg s]$, equivalente a $\neg[(p \wedge m) \to \neg\neg s]$, equivalente a $(p \wedge m) \wedge \neg s$. Reescrita: (a Presidenta vai ao encontro e o Ministro vai ao encontro) e o Senador vai ao encontro. Ou seja, a Presidenta, o Ministro e o Senador vão ao encontro. (v) Reescrita: o triângulo de ângulos A, B e C é retângulo se, e somente se, (o ângulo A é reto ou o ângulo B é reto) ou o ângulo C é reto.

Legenda:

r	:	o triângulo de ângulos A, B e C é retângulo
a	:	o ângulo A é reto
b	:	o ângulo B é reto
c	:	o ângulo C é reto.

Simbolização: $r \leftrightarrow (a \vee b \vee c)$.

Negação: $\neg[r \leftrightarrow (a \vee b \vee c)]$, equivalente a $[r \wedge \neg(a \vee b \vee c)] \vee [\neg r \wedge (a \vee b \vee c)]$, equivalente a $(r \wedge \neg a \wedge \neg b \wedge \neg c) \vee [\neg r \wedge (a \vee b \vee c)]$. Reescrita: (o triângulo de ângulos A, B e C é retângulo e o ângulo A não é reto e o ângulo B não é reto e o ângulo C não é reto) ou [o triângulo de ângulos A, B e C não é retângulo (o ângulo A é reto ou o ângulo B é reto ou o ângulo C é reto)]. Ou seja, (o triângulo é retângulo e nenhum dos ângulos é reto) ou (o triângulo não é retângulo e ao menos um dos ângulos é reto).
