Lógica dos Conectivos: demonstrações diretas

Renata de Freitas *e* Petrucio Viana

IME, UFF

18 de junho de 2015

Sumário

- Tabelas são inadequadas
- Validades imediatas e não imediatas
- Passos lógicos
- Exercícios
- Demonstrações
- Mais exercícios

Parte 1

Tabelas são inadequadas

Tabelas parecem ser adequadas

O Método das Tabelas para validade é:

- simples;
- controlável;
- mecanizável.

Porém, nunca encontramos tabelas nas aulas ou nos textos de Matemática.

Tabelas são ineficientes

Uma das razões é que o Método das Tabelas é extremamente ineficiente.

Seguindo o método ao pé da letra, temos que construir tabelas muito grandes para verificar a validade de argumentos relativamente simples.

Por exemplo:

$$\begin{array}{l}
p \\
p \rightarrow q \\
q \rightarrow r \\
r \rightarrow s \\
s \rightarrow t \\
\hline
t
\end{array}$$

é, obviamente, válido.

Tabelas são ineficientes

Porém, este argumento possui ocorrências de 5 variáveis. Uma tabela para ele terá 32 linhas.

Para construir a tabela temos que calcular os valores das subfórmulas:

$$p \to q, \quad q \to r, \quad r \to s, \quad s \to t$$

A construção da tabela utilizará, no mínimo, 9 colunas.

Tabelas são insuficientes

Além disso, mesmo os argumentos mais simples que ocorrem na Linguagem Matemática possuem ocorrências de partículas que não são conectivos.

É comum o emprego dos quantificadores

para todo , *existe ao menos um*

e até de outras partículas mais complicadas.

Tabelas são insuficientes

Ocorrências de quantificadores podem nos levar a argumentos envolvendo enunciados tão complexos que a determinação da sua validade pelo Método das Tabelas não parece ser uma tarefa que possa ser executada mecanicamente.

Zero é um número natural.
Todo número natural tem um sucessor.
O sucessor de um número natural também é um número natural.
Logo, *existem infinitos números naturais.*

Neste argumento, temos a ocorrência de um quantificador fazendo referência a uma quantidade infinita de elementos.

Parte 2

Validade imediata e não imediata

Classificação das validades

Um primeiro passo para a justificativa de conclusões a partir de premissas, sem o emprego de tabelas, é tentar classificar os argumentos de acordo com a dificuldade inerente na determinação das suas validades (ou invalidades):

1. existem argumentos cujas validades (ou invalidades) são fáceis de determinar;
2. existem argumentos cujas validades (ou invalidades) não são tão fáceis de determinar.

Exemplo 1

$$\frac{p \wedge q}{p}$$

Exemplo 1

$$\frac{p \wedge q}{p}$$

Argumento válido.

Exemplo 1

$$\frac{p \wedge q}{p}$$

Argumento válido.

Validade imediata.

Exemplo 1

Justificativa informal:

Se uma conjuncão é V, cada componente é V.

Justificativa formal:

> *Seja I uma interpretação para $\{p, q\}$, na qual*
> $I^*[p \wedge q] = V$.
> *Daí,* $I^*[p] = I^*[q] = V$.
> *Logo,* $I[p] = V$.
> *Assim, em toda interpretação na qual a premissa é V, a conclusão é V.*

Seria viável aplicar o Método das Tabelas, pois a tabela teria apenas 4 linhas e 3 colunas.

Exemplo 2

$$\frac{p \vee q}{p}$$

Exemplo 2

$$\frac{p \vee q}{p}$$

Argumento inválido.

Exemplo 2

$$\frac{p \lor q}{p}$$

Argumento inválido.

Invalidade imediata.

Exemplo 2

Justificativa informal:

Uma disjuncão pode ser V, sem que um dos componentes seja V.

Justificativa formal:

> *Seja I a interpretação para $\{p, q\}$, na qual $I[p] = F$ e $I[q] = V$.*
> *Neste caso, temos $I^*[p \vee q] = V$, ou seja, a premissa é V.*
> *Além disso, $I^*[p] = F$, ou seja, a conclusão é F.*

Seria viável aplicar o Método das Tabelas, pois a tabela teria apenas 4 linhas e 3 colunas.

Exemplo 3

$$\begin{array}{l} p \\ p \to q \\ \hline q \end{array}$$

Exemplo 3

$$\begin{array}{l} p \\ p \to q \\ \hline q \end{array}$$

Argumento válido.

Exemplo 3

$$\begin{array}{l} p \\ p \to q \\ \hline q \end{array}$$

Argumento válido.

Validade imediata.

Exemplo 3

Justificativa informal:

Se uma implicacão é V, a verdade não diminui quando passamos do antecedente para o consequente.

Justificativa formal:

> *Seja I uma interpretação para $\{p, q\}$, na qual $I^*[p] = V$ e $I^*[p \rightarrow q] = V$.*
> *Daí, $I^*[p] = V$ e ($I^*[p] = F$ ou $I^*[q] = V$).*
> *Daí, $I^*[q] : V$.*
> *Logo, $I[q] : V$.*

Seria viável aplicar o Método das Tabelas, pois a tabela teria apenas 4 linhas e 3 colunas.

Exemplo 4

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ q \\ \hline p \end{array}$$

Exemplo 4

$$\begin{array}{l} p \to q \\ q \\ \hline p \end{array}$$

Argumento inválido.

Exemplo 4

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ q \\ \hline p \end{array}$$

Argumento inválido.

Invalidade imediata.

Exemplo 4

Justificativa informal:

Se o consequente de uma implicacão é V, ela é V independente do valor do antecedente.

Justificativa formal:

> *Seja I a interpretação para $\{p, q\}$, na qual $I[p] = F$ e $I[q] = V$.*
> *Neste caso, temos $I^*[p \to q] = V$ e $I^*[q] : V$, ou seja, as premissas são V.*
> *Além disso, $I^*[p] = F$, ou seja, a conclusão é F.*

Seria viável aplicar o Método das Tabelas, pois a tabela teria apenas 4 linhas e 3 colunas.

Exemplo 5

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ \neg q \\ \hline p \end{array}$$

Exemplo 5

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ \neg q \\ \hline p \end{array}$$

Argumento válido.

Exemplo 5

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ \neg q \\ \hline p \end{array}$$

Argumento válido.

Validade imediata.

Exemplo 5

Justificativa informal:

Se temos duas alternativas e uma delas não acontece, a outra tem que acontecer.

Justificativa formal:

> *Seja I uma interpretação para $\{p, q\}$, na qual $I^*[p \vee q] = V$ e $I^*[\neg q] = V$.*
> *Daí, $(I^*[p] = V$ ou $I^*[q] = V)$ e $I^*[q] = F$.*
> *Ou seja, temos duas alternativas, p ou q, e a segunda delas, q, não acontece.*
> *Daí, $I^*[p] = V$.*
> *Logo, $I[p] = V$.*
> *Assim, em toda interpretação na qual a premissa é V, a conclusão é V.*

Seria viável aplicar o Método das Tabelas, pois a tabela teria apenas 4 linhas e 4 colunas.

A ideia principal

A justificativa da validade (ou invalidade) de um argumento cuja validade (ou invalidade) é imediata pode ser feita por um raciocínio simples, baseado na definição de valor de uma fórmula em uma interpretação.

Neste caso, tabelas, embora viáveis, são desnecessárias.

Na prática, fazemos isto "de cabeça" e nos convencemos rapidamente da validade (ou invalidade) do argumento.

Parte 3

Passos Lógicos

Passos lógicos

Os exemplos acima motivam um dos principais conceitos relativos à maneira como os matemáticos justificam conclusões a partir de premissas, sem o emprego de tabelas.

Seja $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n, \varphi \in FLC$, onde φ é considerada como conclusão.

Dizemos que $\dfrac{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n}{\varphi}$ é um passo lógico se:

(1) $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n \models \varphi$.

(2) a tabela conjunta de $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n, \varphi$ possui no máximo 8 linhas (e um número polinomial de colunas).

Passos lógicos

Um passo lógico é um argumento que (1) é válido e que (2) não é muito grande.

Dito ainda de outra forma...

um passo lógico é um argumento válido, cuja validade não é trabalhosa de verificar, mesmo se usamos uma tabela de avaliação...

mas, na prática, fazemos isto "de cabeça".

Passos lógicos associados ao $\neg$

$$\frac{\neg\neg p}{p} \quad , \quad \frac{\neg(p \wedge q)}{(\neg p) \vee (\neg q)} \quad , \quad \frac{\neg(p \vee q)}{(\neg p) \wedge (\neg q)}$$

$$\frac{\neg(p \to q)}{p \wedge \neg q} \quad , \quad \frac{\begin{array}{l}\neg(p \leftrightarrow q)\\ p\end{array}}{\neg q} \quad , \quad \frac{\begin{array}{l}\neg(p \leftrightarrow q)\\ q\end{array}}{\neg p}$$

Os 4 primeiros são equivalências.

Passos lógicos associados ao $\wedge$

$$\frac{p \wedge q}{p} \quad , \quad \frac{p \wedge q}{q} \quad , \quad \frac{\begin{array}{l} p \\ q \end{array}}{p \wedge q}$$

$$\frac{p \wedge q}{p \vee q} \quad , \quad \frac{p \wedge q}{p \rightarrow q} \quad , \quad \frac{p \wedge q}{p \leftrightarrow q}$$

Nenhum deles é uma equivalência.

Passos lógicos associados ao $\vee$

$$\frac{p}{p \vee q} \quad , \quad \frac{q}{p \vee q} \quad , \quad \frac{p \vee q}{q \vee p}$$

$$\frac{\begin{array}{l} p \vee q \\ \neg p \end{array}}{q} \quad , \quad \frac{\begin{array}{l} p \vee q \\ \neg q \end{array}}{p} \quad , \quad \frac{(p \vee q) \vee r}{p \vee (q \vee r)}$$

O terceiro e o último são equivalências.

Passos lógicos associados ao $\rightarrow$

$$\frac{\begin{array}{l} p \\ p \rightarrow q \end{array}}{q} \quad , \quad \frac{\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \end{array}}{p \rightarrow r} \quad , \quad \frac{\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \neg q \end{array}}{\neg p}$$

$$\frac{p \rightarrow q}{\neg p \vee q} \quad , \quad \frac{q}{p \rightarrow q} \quad , \quad \frac{\neg p}{p \rightarrow q}$$

O quarto é uma equivalência.

Passos lógicos associados ao $\leftrightarrow$

$$\frac{\begin{array}{l} p \\ p \leftrightarrow q \end{array}}{q} \quad , \quad \frac{p \leftrightarrow q}{p \rightarrow q} \quad , \quad \frac{p \leftrightarrow q}{q \rightarrow p}$$

$$\frac{p \leftrightarrow q}{q \leftrightarrow p} \quad , \quad \frac{\begin{array}{l} \neg p \\ p \leftrightarrow q \end{array}}{\neg q} \quad , \quad \frac{\begin{array}{l} \neg q \\ p \leftrightarrow q \end{array}}{\neg p}$$

O quarto é uma equivalência.

Passos lógicos maiores

Passos lógicos são argumentos válidos que possuem tabelas pequenas.

Isto facilita a verificação de que eles são, de fato, passos lógicos.

Mas, na prática, é conveniente considerarmos como passos lógicos, argumentos que possuem tabelas um pouco maiores.
Isto desde que tenhamos certeza de que um tal argumento tenha a mesma *forma* que um passo lógico.

Formas de passos lógicos

Certos argumentos têm a *mesma forma*, que um passo lógico.

Por xemplo, como

$$\begin{array}{l} p \\ p \rightarrow q \\ \hline q \end{array}$$

é um passo lógico, o argumento

$$\begin{array}{l} (p \wedge q) \vee s \\ ((p \wedge q) \vee s) \rightarrow ((t \rightarrow u) \leftrightarrow v) \\ \hline (t \rightarrow u) \leftrightarrow v \end{array}$$

também é aceito como um passo lógico.

Formas de passos lógicos

Baseados nestas ideias, usualmente, escrevemos os passos lógicos usando as letras φ, ψ, θ no lugar de variáveis proposicionais, para indicar que a os passos lógicos dão origem a uma infinidade de argumentos válidos.

Parte 4

Exercícios: tô nessa!

Exercício 1

Classificar os argumentos abaixo como passos lógicos ou não.

(i) $$\frac{\varphi \wedge \neg\varphi}{\psi}$$

(ii) $$\frac{(\varphi \wedge \psi) \wedge \theta}{\varphi \wedge (\psi \wedge \theta)}$$

(iii) $$\frac{\neg(\varphi \wedge \psi)}{(\neg\varphi) \wedge (\neg\psi)}$$

(iv) $$\frac{\varphi \vee \neg\psi}{\varphi \to \psi}$$

(v) $$\frac{\begin{array}{l}\varphi \vee \psi \\ \neg\psi\end{array}}{\varphi \to \psi}$$

(vi) $$\frac{\neg(\varphi \to (\psi \to \theta))}{\neg\theta}$$

(vii) $$\frac{\varphi \to \psi}{\varphi \wedge \psi}$$

(viii) $$\frac{\begin{array}{l}\varphi \\ \varphi \to (\neg\psi) \\ \psi \vee \theta \\ \theta \to \pi\end{array}}{\varphi \to \pi}$$

Exercício 1 (continuação)

(ix) $$\frac{\neg\varphi \qquad \psi}{\varphi \to \psi}$$

(x) $$\frac{\neg\psi}{(\varphi \to \theta) \vee \neg\psi}$$

(xi) $$\frac{\varphi \vee (\psi \to \theta) \qquad \neg\varphi}{(\neg\psi) \vee \theta}$$

(xii) $$\frac{\varphi \vee \psi}{\varphi \wedge \psi}$$

(xiii) $$\frac{\varphi \to \psi \qquad \psi \to \theta \qquad \neg\theta}{\neg\varphi}$$

(xiv) $$\frac{\varphi \vee \psi \qquad \psi \vee \theta}{\varphi \vee \theta}$$

Parte 5

Validade baseada em passos lógicos

Analisando o argumento

Como os passos lógicos podem nos ajudar na justificativa de enunciados por meio de argumentos?

$$\begin{array}{l} p \\ p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \\ r \rightarrow s \\ s \rightarrow t \\ \hline t \end{array}$$

Este argumento não é um passo lógico: é muito grande.

Mas, a validade deste argumento é imediata.

A ideia principal

Comparando o argumento com o passo lógico:

$$\begin{array}{l} \varphi \\ \varphi \to \psi \\ \hline \psi \end{array}$$

vemos que o argumento consiste de várias *instâncias* deste passo lógico.

Explicando a validade

No passo lógico, temos as premissas φ e $\varphi \rightarrow \psi$ e concluímos ψ.

No argumento, temos as premissas p e $p \rightarrow q$ e concluímos q.

Agora, temos q e $q \rightarrow r$ e concluímos r.

Agora, temos r e $r \rightarrow s$ e concluímos s.

E, finalmente, temos s e $s \rightarrow t$ e concluímos t.

Resumindo a explicação

Podemos justificar a validade do argumento, através de um texto como:

Suponhamos p, $p \to q$, $q \to r$, $r \to s$ e $s \to t$.
De p e $p \to q$, *temos* q.
De q e $q \to r$, *temos* r.
De r e $r \to s$, *temos* s.
De s e $s \to t$, *temos* t.

O argumento é válido, pois a conclusão é demonstrável a partir das premissas, por meio de passos lógicos.

Analisando o argumento

Considere o argumento:

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ \neg p \\ q \rightarrow \neg r \\ r \vee (s \wedge t \wedge u) \\ \hline u \end{array}$$

Que passos lógicos podemos associar a ele?

Procurando passos lógicos

Analisando o argumento:

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ \neg p \\ q \to \neg r \\ r \vee (s \wedge t \wedge u) \\ \hline u \end{array}$$

chegamos aos seguintes passos lógicos:

$$\begin{array}{l} \varphi \vee \psi \\ \neg\varphi \\ \hline \psi \end{array} \quad , \quad \begin{array}{l} \varphi \\ \varphi \to \neg\psi \\ \hline \neg\psi \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \neg\varphi \\ \varphi \vee \psi \\ \hline \psi \end{array} \quad , \quad \begin{array}{l} \varphi \wedge \psi \\ \hline \psi \end{array}$$

Aplicando passos lógicos

Podemos justificar a validade do argumento, através de um texto como:

> *Suponhamos* $p \vee q$, $\neg p$, $q \rightarrow \neg r$, *e* $r \vee (s \wedge t \wedge u)$.
> *De* $p \vee q$ *e* $\neg p$, *temos* q.
> *De* q *e* $q \rightarrow \neg r$, *temos* $\neg r$.
> *De* $\neg r$ *e* $r \vee (s \wedge t \wedge u)$, *temos* $s \wedge t \wedge u$.
> *De* $s \wedge t \wedge u$, *temos* u.

O argumento é válido, pois a conclusão é demonstrável a partir das premissas, por meio de passos lógicos.

Analisando o argumento

Considere o argumento:

$$
\begin{array}{l}
p \rightarrow (r \vee \neg q) \\
\neg r \\
(\neg q) \rightarrow s \\
(\neg s) \vee t \\
(\neg r) \rightarrow p \\
\hline
t
\end{array}
$$

Procurando passos lógicos

Analisando o argumento:

$$\begin{array}{l} p \to (r \vee \neg q) \\ \neg r \\ (\neg q) \to s \\ (\neg s) \vee t \\ (\neg r) \to p \\ \hline t \end{array}$$

chegamos aos seguintes passos lógicos:

$$\begin{array}{l} \varphi \\ \varphi \to \psi \\ \hline \psi \end{array} \quad , \quad \begin{array}{l} \neg\varphi \\ \varphi \vee \psi \\ \hline \psi \end{array}$$

Aplicando passos lógicos

Podemos justificar a validade do argumento, através de um texto como:

> *Suponhamos* $p \rightarrow (r \vee \neg q)$, $\neg r$, $(\neg q) \rightarrow s$, $(\neg s) \vee t$ *e* $(\neg r) \rightarrow p$.
> *De* $\neg r$ *e* $(\neg r) \rightarrow p$, *temos* p.
> *De* p *e* $p \rightarrow (r \vee \neg q)$, *temos* $r \vee (\neg q)$.
> *De* $\neg r$ *e* $r \vee \neg q$, *temos* $\neg q$.
> *De* $\neg q$ *e* $(\neg q) \rightarrow s$, *temos* s.
> *De* s *e* $(\neg s) \vee t$, *temos* t.

O argumento é válido, pois a conclusão t é demonstrável a partir das premissas, por meio de passos lógicos.

Aplicando passos lógicos

A ideia geral para a demonstração da validade de um argumento (válido) é se apoiar na validade de outros argumentos, cujas validades são mais simples de serem detectadas, e usar estas validades na construção, passo a passo, de um texto que justifica a validade do argumento.

A princípio, este texto parte das premissas do argumento e vai gradativamente, pela aplicação das outras validades, caminhando para a conclusão do argumento.

Demonstrações, 1ª abordagem

Uma demonstração direta da validade de um argumento é um texto construído passo a passo, a partir das hipóteses do argumento, por meio de aplicações de passos lógicos, como ilustrado nos exemplos anteriores.

A seguir, vamos melhorar um pouco esta descrição do que é uma demonstração direta. . .

Antes, porém, vejamos alguns exemplos nos quais trocamos o texto por uma notação mais compacta.

Exemplo 6

$$p, p \to q, q \to s, s \to t \models t$$

Demonstração:

P	1.	p
P	2.	$p \to q$
P	3.	$q \to r$
P	4.	$r \to s$
P	5.	$s \to t$
1, 2	6.	q
3, 6	7.	r
4, 7	8.	s
5, 8	9.	t ■

Utilizamos a letra P para indicar que a fórmula é uma premissa e o ■ para indicar o fim da demonstração.
O único passo lógico empregado foi:

$$\frac{\begin{array}{l}\varphi \\ \varphi \to \psi\end{array}}{\psi}$$

Exemplo 7

$$p \lor q, \neg p, q \to \neg r, r \lor (s \land t \land u) \models u$$

Demonstração:

P	1.	$p \lor q$
P	2.	$\neg p$
P	3.	$q \to \neg r$
P	4.	$r \lor (s \land t \land u)$
1, 2	5.	q
3, 5	6.	$\neg r$
4, 6	7.	$s \land t \land u$
7	9.	u ■

Os passos lógicos empregados foram:

$$\frac{\begin{array}{l}\varphi \\ \varphi \to \psi\end{array}}{\psi} \qquad \frac{\begin{array}{l}\varphi \lor \psi \\ \neg\varphi\end{array}}{\psi} \qquad \frac{\varphi \land \psi}{\psi}$$

Exemplo 8

$$p \rightarrow (r \vee \neg q), \neg r, (\neg q) \rightarrow s, (\neg s) \vee t, (\neg r) \rightarrow p \models t$$

Demonstração:

P	1.	$p \rightarrow (r \vee \neg q)$
P	2.	$\neg r$
P	3.	$(\neg q) \rightarrow s$
P	4.	$(\neg s) \vee t$
P	5.	$(\neg r) \rightarrow p$
2, 5	6.	p
1, 6	7.	$r \vee \neg q$
2, 7	8.	$\neg q$
3, 8	9.	s
4, 9	10.	t ■

Os passos lógicos empregados foram:

$$\frac{\begin{array}{l}\varphi \\ \varphi \rightarrow \psi\end{array}}{\psi} \qquad \frac{\begin{array}{l}\varphi \vee \psi \\ \neg\varphi\end{array}}{\psi} \qquad \frac{\begin{array}{l}(\neg\varphi) \vee \psi \\ \varphi\end{array}}{\psi}$$

Demonstrações, 2ª abordagem

Sejam $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n, \varphi \in FLC$.

Uma demonstração (direta) de φ a partir de $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ é uma sequência finita de fórmulas

$$\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m, \varphi$$

tal que para cada i, $1 \leq i \leq n$, existem $\varphi_{i_1}, \varphi_{i_2}, \ldots, \varphi_{i_k}$ anteriores a i na sequência, tais que

$$\frac{\varphi_{i_1}, \varphi_{i_2}, \ldots, \varphi_{i_2}}{\varphi_i}$$

é um passo lógico.

Parte 6

Mais exercícios: tô mais feliz do que pinto no lixo!!!

Exercício 2

Construir demonstrações diretas para os seguintes argumentos:

(i)
$$\begin{array}{l} p \\ p \rightarrow (q \wedge r) \\ q \rightarrow (s \wedge t) \\ \hline t \end{array}$$

(ii)
$$\begin{array}{l} p \wedge q \\ q \rightarrow r \\ r \rightarrow (s \wedge t) \\ t \rightarrow (u \wedge v) \\ \hline u \end{array}$$

(iii)
$$\begin{array}{l} \neg p \\ p \vee (q \wedge r) \\ (\neg r) \wedge t \\ \hline t \end{array}$$

(iv)
$$\begin{array}{l} (p \vee q) \wedge (p \vee \neg r) \\ s \rightarrow t \\ t \rightarrow \neg q \\ s \wedge t \\ \hline p \end{array}$$

Exercício 2 (Continuação)

$$\text{(v)}\quad \begin{array}{l} q \rightarrow t \\ s \wedge q \\ t \rightarrow r \\ \neg r \vee (s \vee t) \\ \hline s \vee t \end{array} \qquad\qquad \text{(vi)}\quad \begin{array}{l} \neg p \vee (q \rightarrow r) \\ t \wedge p \\ t \rightarrow q \\ \hline r \vee s \end{array}$$

(Ainda) mais exercícios

1. Ler o texto da Aula 8.

2. Resolver os exercícios da Lista 8.