GAN00166: Lógica para Ciência da Computação

Texto da Aula 8

Demonstrações Diretas na LC

Petrucio Viana
Departamento de Análise, IME–UFF

Sumário

Neste texto, iniciamos a aplicação de todos os conteúdos e técnicas já estudados, em uma descrição geral da *dinâmica da prática matemática*.

Do ponto de vista da Linguagem e da Lógica Matemáticas, as atividades mais importantes executadas pelos matemáticos são a *definição* (*descrição*) *de conceitos* e a *demonstração* (*justificativa*) *de resultados*. Nosso objetivo principal é utilizar os conceitos e técnicas da Lógica como uma base para apresentar e discutir certas nuances que as demonstrações possuem. Em particular, vamos discutir, do ponto de vista da Lógica: *o que é* uma demonstração, *como se faz* uma demonstração, *como se escreve* uma demonstração.

Se você já estudou demonstrações em outras disciplinas, certamente o estudo que segue enriquecerá a visão que você tem sobre esta noção. Se você nunca estudou demonstrações, o estudo que segue pode ser considerado como uma porta de entrada para estes aspecto fascinante da atividade matemática.

Neste texto, abordamos a noção fundamental de *passo lógico* (Seção 1); os conceitos de *justificativa para a validade baseada em passos lógicos* (Seção 2); e *demonstrações diretas* (Seções 2 e 3).

Depois de estudarmos este texto, vamos ser capazes de: decidir quando um argumento é ou não um passo lógico, usando uma tabela de avaliação (Exercício 1); mostrar que um argumento é um passo lógico, examinando as possibilidades de valores para seus componentes (Exercício 2); e mostrar que um argumento não é um passo lógico, exibindo uma interpretação na qual suas pemissas são V e sua conclusão é F (Exercício 3).

Um aspecto importante dos estudos de Linguagem e Lógica Matemáticas é o caráter semi-formal que adotamos, empregando um simbolismo e um rigor característicos na redação das resoluções de problemas. Por esta razão, dedicamos parte da nossa atenção a maneira correta de escrevermos as demonstrações, em Lógica (Seção 3).

Depois de estudarmos este texto, vamos ser capazes de: dissecar argumentos em passos lógicos e elaborar demonstrações diretas, baseadas em passos lógicos (Exercícios 4, 5, 6 e 7).

Muito cuidado!!!

Na prática matemática, pelas mais variadas razões, as demostrações (também chamadas de *provas*) são redigidas em textos coloquiais, das mais variadas maneiras, com os mais variados graus de rigor, e até mesmo, sem muito rigor.

Mas, em nossa disciplina, **a única maneira aceitável de escrevermos as demonstrações é a apresentada na Seção 3** e detalhada na Figura 1, na página 23.

1 Passos lógicos

Como vimos, um argumento é uma sequência finita de enunciados, em que um é considerado como *conclusão* (também chamado de *tese*) e os demais são considerados como *premissas* (também chamadas de *hipóteses*) sendo que as hipóteses são consideradas como *justificativas* para a tese:

$$\begin{array}{c} \text{Hipótese 1} \\ \text{Hipótese 2} \\ \vdots \\ \text{Hipótese } n \\ \hline \text{Tese} \end{array}$$

Vimos, também, que um argumento é válido se em qualquer contexto em que suas hipóteses são simultaneamente V, a sua tese também é V. E que um argumento é inválido se não é válido, isto é, se existe ao menos um contexto no qual as suas hipóteses são simultaneamente V e a sua tese é F (como vimos, em Lógica, trocamos a noção vaga de *contexto* por duas noções precisas de *interpretação*).

Finalmente, já conhecemos o Método das Tabelas para Validade, como uma ferramenta para decidir a validade de argumentos que não possuem enunciados quantificados (até o momento não estudamos nenhum método para a verificação da validade de argumentos que possuem enunciados quantificados).

Uma alternativa para o Método das Tabelas para Validade (que também é aplicado no estudo da validade de argumentos que possuem enunciados quantificados) surge da tentativa de classificar os argumentos de acordo com a dificuldade inerente na determinação das suas validades (ou invalidades):

(1) Existem argumentos cujas validades (ou invalidades) são fáceis de determinar.

(2) Existem argumentos cujas validades (ou invalidades) não são tão fáceis de determinar.

Vejamos exemplos de argumentos que pertencem às categorias (1) e (2), acima.

Exemplo 1 (a) Considere o argumento

$$\frac{p \wedge q}{p}.$$

Um pouco de pensamento nos leva a concluir que este argumento é válido e que, na verdade, a sua validade é imediata.

De fato, supondo $p \wedge q : V$, estamos considerando apenas a linha 1 da tabela:

p	q	$p \wedge q$	
V	V	V	1
V	F	F	
F	V	F	
F	F	F.	

E, na interpretação da linha 1, temos $p : V$.

(b) Por razões análogas às do argumento do Exemplo 1(a), o argumento

$$\frac{p \wedge q}{q}$$

também é válido e sua validade é imediata.

(c) Considere o argumento

$$\frac{p \vee q}{p}.$$

Um pouco de pensamento nos leva a concluir que este argumento é inválido e que, na verdade, sua invalidade é imediata.

De fato, supondo $p \vee q : V$, estamos considerando exatamente as linhas 1, 2 e 3 da tabela:

p	q	$p \vee q$	
V	V	V	1
V	F	V	2
F	V	V	3
F	F	F.	

E na interpretação da linha 3, temos $p \vee q : V$ (premissa V) e $p : F$ (conclusão F).

(d) Por razões análogas às do argumento do Exemplo 1(c), o argumento

$$\frac{p \vee q}{q}$$

também é inválido e sua invalidade é imediata. □

Os argumentos do Exemplo 1 motivam um dos principais conceitos que nos levam a um método alternativo (ao Método das Tabelas para Validade), para a justificativa da validade de argumentos: a noção de *passo lógico*.

Um *passo lógico* é um argumento simbolizado que

1. possui no máximo ocorrências de três variáveis;
2. possui no máximo três premissas;
3. é válido.

Assim, os argumentos do Exemplo 1(a) e 1(b) são passos Lógicos. Os outros não são.

O ponto principal sobre esta noção é que a validade de um passo lógico pode ser justificada através de uma uma tabela de avaliação relativamente pequena, com no máximo 8 linhas. Ou seja, um passo lógico é um argumento simbolizado que é válido e cuja verificação da validade não é muito trabalhosa.

Vejamos mais alguns exemplos e contra-exemplos de passos lógicos.

Exemplo 2 (a) O argumento

$$\begin{array}{l} p \\ p \to q \\ \hline q \end{array}$$

é um passo lógico.

De fato, supondo $p : V$ e $p \to q : V$, estamos considerando apenas a linha 1 na tabela:

p	q	$p \to q$	
V	V	V	1
V	F	F	
F	V	V	
F	F	V.	

E na interpretação da linha 1, temos $q : V$. Assim, o argumento é válido.

(b) O argumento

$$\begin{array}{l} q \\ p \to q \\ \hline p \end{array}$$

não é um passo lógico.

De fato, supondo $q : V$ e $p \to q : V$, estamos considerando as linhas 1 e 3 da tabela:

p	q	$p \to q$	
V	V	V	1
V	F	F	
F	V	V	3
F	F	V.	

E na interpretação da linha 3, temos $q : V$, $p \to q : V$ (premissas V) e $p : F$ (conclusão F). Assim, o argumento é inválido.

(c) O argumento

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ \neg q \\ \hline p \end{array}$$

é um passo lógico.

De fato, supondo $p \vee q : V$ e $\neg q : V$, estamos considerando apenas linha 2 da tabela:

p	q	$p \vee q$	$\neg q$	
V	V	V	F	
V	F	V	V	2
F	V	V	F	
F	F	F	V.	

E na interpretação da linha 2, temos $p : V$. Assim, o argumento é válido.

(d) O argumento

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ q \to r \\ \hline p \wedge r \end{array}.$$

não é um passo lógico.

De fato, supondo $p \vee q : V$ e $q \to r : V$, estamos considerando apenas as linhas 1, 3, 4 e 5 da tabela:

p	q	r	$p \vee q$	$q \to r$	$p \wedge r$	
V	V	V	V	V	V	1
V	V	F	V	F	F	
V	F	V	V	V	V	3
V	F	F	V	V	F	4
F	V	V	V	V	F	5
F	V	F	V	F	F	
F	F	V	F	V	F	
F	F	F	F	V	F.	

E na interpretação da linha 4, temos $p \vee q : V$, $q \to r : V$ e $p \wedge r : F$. Assim, o argumento é inválido.

(e) O argumento

$$\frac{\neg p}{p \to q}$$

é um passo lógico.

De fato, supondo $\neg p : V$, estamos considerando exatamente as linhas 3 e 4 da tabela:

p	q	$\neg p$	$p \to q$	
V	V	F	V	
V	F	F	F	
F	V	V	V	3
F	F	V	V	4

.

Nas interpretações das linhas 3 e 4, temos $p \to q : V$. Assim, o argumento é válido.

1.1 Observações

Observação 1 Dado um argumento simbolizado qualquer, sempre podemos decidir se ele é um passo lógico ou não.

De fato, para ser um passo lógico, um argumento deve ter: (1) no máximo ocorrências de três letras distintas; (2) no máximo três premissas; e (3) ser válido.

Assim, para mostrar que um argumento não é um passo lógico basta que mostremos que ele: ou ($1'$) tem ocorrências de mais de três letras distintas; ou ($2'$) tem mais que três premissas; ou ($3'$) é inválido.

Os intens (1), (2), ($1'$) e ($2'$) podem ser facilmente verificados por inspeção. Já os itens (3) e ($3'$) podem ser verificados diretamente pelo Método das Tabelas para Validade. Mas, como os argumentos são pequenos, é preferível usar raciocínios que envolvem as tabelas indiretamente.

Por exemplo, podemos mostrar que o argumento do Exemplo 2(c)

$$\begin{array}{c} p \vee q \\ \neg q \\ \hline p \end{array}$$

é um passo lógico supondo que suas premissas são V e examinando as possibilidades de valores das suas componentes. Mais especificamente, temos:

> Suponha $p \vee q : V$ e $\neg q : V$. Daí, $q : F$. Mas, como $p \vee q : V$, não podemos ter $p : F$. Assim, $p : V$.

Observação 2 Nosso objetivo é classificar como passos lógicos argumentos válidos que possuem tabelas pequenas, pois isto facilita a verificação de que eles são, de fato, passos lógicos. Mas, ... atenção!!!

Na prática, muitas vezes é conveniente considerarmos como passos lógicos, argumentos válidos que possuem tabelas um pouco maiores, mas cujas validades "saltam aos olhos".

Por exemplo, qualquer estudante de Lógica que observa que o argumento

$$\frac{p \wedge q}{p}$$

é um passo lógico, não vacila em considerar que o argumento

$$\frac{p \wedge q \wedge r \wedge s \wedge t}{p},$$

cuja tabela possui 32 linhas, também pode ser aceito como um passo lógico, dado que sua validade "salta aos olhos".

1.2 Exercícios

Exercício 1 Classifique os argumentos abaixo como passos lógicos ou não, de acordo com o procedimento empregado nos Exemplos 1 e 2.

(i) $\dfrac{\neg p}{p}$ (ii) $\dfrac{\neg\neg\neg p}{\neg p}$ (iii) $\dfrac{\neg p}{\neg\neg\neg p}$

(iv) $\dfrac{p \wedge q}{q \wedge p}$ (v) $\dfrac{p \wedge q \wedge r}{q}$ (vi) $\dfrac{p \vee q}{p \wedge q}$

(vii) $\dfrac{p \vee q}{\neg p}$ (viii) $\dfrac{\neg p}{\neg(p \vee q)}$ (ix) $\dfrac{\neg(p \vee q)}{\neg q}$

(x) $\dfrac{p \rightarrow q}{p}$ (xi) $\dfrac{p \rightarrow q}{q}$ (xii) $\dfrac{\neg p}{p \rightarrow q}$

(xiii) $\dfrac{q}{p \rightarrow q}$ (xiv) $\dfrac{p \leftrightarrow q}{p \wedge q}$ (xv) $\dfrac{p \wedge q}{p \leftrightarrow q}$

Exercício 2 Mostre que os seguintes argumento são passos lógicos, mas sem usar uma tabelas de avaliação diretamente. Ou seja, em cada caso, suponha que o antecedente é V e tente através de um exame dos valores possíveis mostrar que, sob esta suposição, a conclusão também é V:

Passos lógicos associados ao $\neg$:

(i) $\dfrac{\neg\neg p}{p}$ (ii) $\dfrac{\neg(p \wedge q)}{(\neg p) \vee (\neg q)}$ (iii) $\dfrac{\neg(p \vee q)}{(\neg p) \wedge (\neg q)}$

Passos lógicos associados ao $\wedge$:

(iv) $\dfrac{p \wedge q}{p}$ (v) $\dfrac{p \wedge q}{q}$ (vi) $\dfrac{\begin{array}{c}p\\ q\end{array}}{p \wedge q}$

Passos lógicos associados ao $\vee$:

(vii) $\dfrac{p}{p \vee q}$ (viii) $\dfrac{p \vee q}{q \vee p}$ (ix) $\dfrac{\begin{array}{l} p \vee q \\ p \rightarrow r \\ q \rightarrow r \end{array}}{r}$

Passos lógicos associados ao $\rightarrow$:

(x) $\dfrac{\begin{array}{l} p \\ p \rightarrow q \end{array}}{q}$ (xi) $\dfrac{\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \end{array}}{p \rightarrow r}$ (xii) $\dfrac{\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \neg q \end{array}}{\neg p}$

Passos lógicos associados ao $\leftrightarrow$:

(xiii) $\dfrac{p \leftrightarrow q}{p \rightarrow q}$ (xiv) $\dfrac{p \leftrightarrow q}{q \rightarrow p}$ (xv) $\dfrac{p \wedge \neg q}{\neg(p \leftrightarrow q)}$

Exercício 3 Mostrar que os argumentos abaixo não são passos lógicos, exibindo uma interpretação na qual a(s) premissa(s) é(são) V e a conclusão é F:

(i) $\dfrac{\neg(p \wedge q)}{(\neg p) \wedge (\neg q)}$ (ii) $\dfrac{p \vee (\neg q)}{p \rightarrow q}$ (iii) $\dfrac{p \rightarrow q}{p \wedge q}$

(iv) $\dfrac{p \vee q}{p \wedge q}$ (v) $\dfrac{\begin{array}{l} p \vee q \\ \neg q \end{array}}{p \rightarrow q}$ (vi) $\dfrac{\begin{array}{l} p \vee q \\ q \vee r \end{array}}{p \vee r}$

(vii) $\dfrac{\begin{array}{l} p \\ p \rightarrow (\neg q) \\ q \vee r \\ r \rightarrow s \end{array}}{p \rightarrow s}$

Antes de ler a resolução, tente resolver o exercício usando os conceitos estudados.

***Resolução do Exercício 1*:** (i) Supondo $\neg p : V$, estamos considerando apenas a linha 2 da tabela:

p	$\neg p$	
V	F	
F	V	2

. Na interpretação da linha 2, temos $\neg p : V$ e $p : F$. Assim, o argumento é inválido.

(ii) Supondo $\neg\neg p : V$, estamos considerando apenas a linha 1 da tabela:

p	$\neg p$	$\neg\neg p$	
V	F	V	1
F	V	F	

. Na interpretação da linha 1, temos $p : V$. Assim, o argumento é válido. (iii) Supondo $\neg p : V$, estamos considerando apenas a linha 2 da tabela:

p	$\neg p$	$\neg\neg p$	$\neg\neg\neg p$	
V	F	V	F	1
F	V	F	V	

. Na interpretação da linha 2, temos $\neg\neg\neg p : V$. Assim, o argumento é válido. (iv) Supondo $p \wedge q : V$, estamos considerando apenas a primeira linha da tabela:

p	q	$p \wedge q$	$q \wedge p$	
V	V	V	V	1
V	F	F	F	
F	V	F	F	
F	F	F	F	

. Na interpretação da linha 1, temos $q \wedge p : V$. Assim, o argumento é válido. (v) Supondo $p \wedge q \wedge r : V$, estamos considerando apenas a primeira linha da tabela:

p	q	r	$p \wedge q$	$p \wedge q \wedge r$	
V	V	V	V	V	1
V	V	F	V	F	
V	F	V	F	F	
V	F	F	F	F	
F	V	V	F	F	
F	V	F	F	F	
F	F	V	F	F	
F	F	F	F	F	

. Na interpretação da linha 1, temos $q : V$. Assim, o argumento é válido. (vi) Supondo $p \vee q : V$, estamos considerando exatamente as linhas 1, 2 e 3 da tabela:

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	
V	V	V	V	1
V	F	V	F	2
F	V	V	F	3
F	F	F	F	

. Na interpretação da linha 2, temos $p \vee q : V$ e $p \wedge q : F$. Assim, o argumento é inválido.

(vii) Supondo $p \vee q : V$, estamos considerando exatamente as linhas 1, 2 e 3 da tabela:

p	q	$p \vee q$	$\neg p$	
V	V	V	F	1
V	F	V	F	2
F	V	V	V	3
F	F	F	V	

. Na interpretação da linha 1, temos $p \vee q : V$ e $\neg p : F$. Assim, o argumento é inválido. (viii) Supondo $p \vee q : V$, estamos considerando exatamente as linhas 3 e 4 da tabela:

p	q	$\neg p$	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	
V	V	F	V	F	
V	F	F	V	F	
F	V	V	V	F	3
F	F	V	F	V	4

. Na interpretação da linha 3, temos $\neg p : V$ e $\neg(p \vee q) : F$. Assim, o argumento é inválido. (ix) Supondo $\neg(p \vee q) : V$, estamos considerando apenas a linha 4 da tabela:

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg q$	
V	V	V	F	F	
V	F	V	F	V	
F	V	V	F	F	
F	F	F	V	V	4

. Na interpretação da linha 4, temos $\neg q : V$. Assim, o argumento é válido. (x) Supondo $p \rightarrow q : V$, estamos considerando exatamente as linhas 1, 2 e 4 da tabela:

p	q	$p \rightarrow q$	
V	V	V	1
V	F	F	2
F	V	V	
F	F	V	4

. Na interpretação da linha 4, temos $p : F$. Assim, o argumento é inválido. (xi) Supondo $p \rightarrow q : V$, estamos considerando exatamente as linhas 1, 2 e 4 da tabela:

p	q	$p \rightarrow q$	
V	V	V	1
V	F	F	2
F	V	V	
F	F	V	4

. Na interpretação da linha 4, temos $q : F$. Assim, o argumento é inválido. (xii) Supondo $\neg p : V$, estamos considerando exatamente as linhas 3 e 4 da tabela:

p	q	$\neg p$	$p \to q$	
V	V	F	V	
V	F	F	F	
F	V	V	V	3
F	F	V	V	4

. Nas interpretações das linhas 3 e 4, temos $p \to q : V$. Assim, o argumento é válido. (xiii) Supondo $q : V$, estamos considerando exatamente as linhas 1 e 3 da tabela:

p	q	$p \to q$	
V	V	V	1
V	F	F	
F	V	V	3
F	F	V	

. Nas interpretações das linhas 1 e 3, temos $p \to q : V$. Assim, o argumento é válido. (xiv) Supondo $p \leftrightarrow q : V$, estamos considerando exatamente as linhas 1 e 4 da tabela:

p	q	$p \leftrightarrow q$	$p \wedge q$	
V	V	V	V	1
V	F	F	F	
F	V	F	F	
F	F	V	F	4

. Na interpretação da linha 4, temos $p \leftrightarrow q : V$ e $p \wedge q : F$. Assim, o argumento é inválido. (xv) Supondo $p \wedge q : V$, estamos considerando apenas a linha 1 da tabela:

p	q	$p \wedge q$	$p \leftrightarrow q$	
V	V	V	V	1
V	F	F	F	
F	V	F	F	
F	F	F	V	

. Na interpretação da linha 1, temos $p \leftrightarrow q : V$. Assim, o argumento é válido. ***Resolução do Exercício 2*:** (i) Suponha $\neg\neg p : V$. Daí, $\neg p : F$. Logo, $p : V$. Ou seja, quando a premissa é V, a conclusão também é V. Assim, o argumento é válido. (ii) Suponha $\neg(p \wedge q) : V$. Daí, $p \wedge q : F$. Assim, ao menos um dos dois $p : F$ ou $q : F$. Daí, ao menos um dos dois $\neg p : V$ ou $\neg q : V$. Logo, $(\neg p) \vee (\neg q) : V$. Ou seja, quando a premissa é V, a conclusão também é V. Assim, o argumento é válido. (iii) Suponha $\neg(p \vee q) : V$. Daí, $p \vee q : F$. Assim, ambos $p : F$ e $q : F$. Daí, ambos $\neg p : V$ e $\neg q : V$. Logo, $(\neg p) \wedge (\neg q) : V$. Ou seja, quando a premissa é V, a conclusão tanbém é V. Assim, o argumento é válido. Observe que (i), (ii) e (iii) são, na verdade, equivalências. (iv) Suponha $p \wedge q : V$. Daí, ambos $p : V$ e $q : V$. Logo, $p : V$. Ou seja, quando a premissa é V, a conclusão tanbém é V. Assim, o argumento é válido. (v) Suponha $p \wedge q : V$. Daí, ambos $p : V$ e $q : V$. Logo, $p : V$. Ou seja, quando a premissa é V, a conclusão tanbém é V. Assim, o argumento é válido. (vi) Suponha que $p : V$ e $q : V$. Daí, $p \wedge q : V$. Ou seja, quando a premissa é V, a conclusão tanbém é V. Assim, o argumento é válido. Observe que nenhum dentre (iv), (v) e (vi) é uma equivalência. (vii) Suponha $p : V$. Logo, $p \vee q : V$. Ou seja, quando a premissa é V, a conclusão tanbém é V. Assim, o argumento é válido. (viii) Suponha $p \vee q : V$. Daí, ao menos um dos dois $p : V$ ou $q : V$. Logo, $q \vee p : V$. Ou seja, quando a premissa é V, a conclusão tanbém é V. Assim, o argumento é válido. (ix) Suponha que $p \vee q : V$, $p \to r : V$ e $q \to r : V$. Daí, ao menos um dos dois $p : V$ ou $q : V$. Se for $p : V$, como $p \to r : V$, temos $r : V$. Analogamente, se for $q : V$, como $q \to r : V$, temos $r : V$. Logo, sempre temos $r : v$. Ou seja, quando a premissa é V, a conclusão tanbém é V. Assim, o argumento é válido. Observe que (viii) é uma equivalência, mas nem (vii) nem (ix) são equivalências. (x) Suponha que $p : V$ e $p \to q : V$. Daí, temos que ter $q : V$. Pois se fosse $q : F$, teríamos $p : V$ e $q : F$, o que nos daria $p \to q : F$, contradizendo a Tabela do $\to$. Ou seja, quando a premissa é V, a conclusão tanbém é V. Assim, o argumento é válido. (xi) Suponha $p \to q : V$ e $q \to r : V$. Daí, temos que ter $p \to r : V$. Pois se fosse $p \to r : F$, teríamos $p : V$ e $r : F$. Agora, $p : V$ e $p \to q : V$ nos daria $q : V$. Além disso, $q : V$ e $q \to r : V$ nos daria $r : V$. Assim, ao final, teríamos $p : V$ e $r : V$, o que nos daria $p \to r : V$, contradizendo a Tabela do $\to$. Ou seja, quando a premissa é V, a conclusão tanbém é V. Assim, o argumento é válido. (xii) Suponha $p \to q : V$ e $\neg q : V$. Daí, $q : F$. Assim, temos que ter $p : F$, ou seja, $\neg p : V$. Pois se fosse $p : V$, teríamos $p : V$ e $q : F$, contradizendo a Tabela do $\to$. Ou seja, quando a premissa é V, a conclusão tanbém é V. Assim, o argumento é válido. Observe que nenhum dentre (x), (xi) e (xii) é uma equivalência. (xiii) Suponha $p \to q : V$. Daí, p e q têm o mesmo valor. Se ambos são V, temos $p \to q : V$. Se ambos são F, temos $p \to q : V$. Logo, sempre temos $p \to q : v$. Ou seja, quando a premissa é V, a conclusão tanbém é V. Assim, o argumento é válido. (xiv) Suponha $p \leftrightarrow q : V$. Daí, p e q têm o mesmo valor. Se ambos são V, temos $q \to p : V$. Se ambos são F, temos $q \to p : V$. Logo, sempre temos $q \to p : v$. Ou seja, quando a premissa é V, a conclusão tanbém é V. Assim, o argumento é válido. (xv) Suponha $p \wedge \neg q : V$. Daí, temos $p : V$ e $\neg q : V$. Assim, $p : V$ e $q : F$. Daí, $p \leftrightarrow q : F$. Logo, $\neg(p \leftrightarrow q) : V$. não podemos ter $q \to p : F$, pois se assim fosse, teríamos $q : V$ e $p : F$, contradizendo a suposição $p \leftrightarrow q : V$. Ou seja, quando a premissa é V, a conclusão tanbém é V. Assim, o argumento é válido. Observe que nenhum dentre (xiii), (xiv) e (xv) é uma equivalência. ***Resolução do Exercício 3*:** (i) Considere a interpretação $p : V$ e $q : F$. Temos $p \wedge q : F$. Assim, $\neg(p \wedge q) : V$ (premissa V). Mas como $p : V$, temos $\neg p : F$. Assim, $(\neg p) \wedge (\neg q) : F$ (conclusão F). Logo, o argumento é inválido. (ii) Considere a interpretação $p : V$ e $q : F$. Temos $\neg q : V$. Assim, $p \vee (\neg q) : V$ (premissa V). Mas $p \to q : F$ (conclusão F). Logo, o argumento é inválido. (iii) Considere a interpretação $p : F$ e $q : V$. Temos $p \to q : V$ (premissa V). Mas $p \wedge q : F$ (conclusão F). Logo, o argumento é inválido. (iv) Considere a interpretaçãor $p : V$ e $q : F$. Temos $p \vee q : V$ (premissa V). Mas $p \wedge q : F$ (conclusão F). Logo, o argumento é inválido. (v) Considere a interpretação $p : V$ e $q : F$. Temos $p \vee q : V$ e $\neg q : V$ (premissas simultaneamente V). Mas $p \to q : F$ (conclusão F). Logo, o argumento é inválido. (vi) Considere a interpretação $p : F$, $q : V$ e $r : F$. Temos $p \vee q : V$ e $q \vee r : V$ (premissas simultaneamente V). Mas $p \vee r : F$ (conclusão F). Logo, o argumento é inválido. (vii) Não é um passo lógico, pois possui ocorrências de 4 variáveis. Lembre-se: passos lógicos são argumentos pequenos!

2 Validade baseada em passos lógicos

Vamos ver, agora, como os passos lógicos nos levam a um método alternativo (ao Método das Tabelas para Validade) para a justificativa da validade de argumentos.

Exemplo 3 Consideremos o argumento:

$$\begin{array}{l} p \\ p \to q \\ q \to r \\ r \to s \\ s \to t \\ \hline t \end{array}.$$

Este argumento possui ocorrências de 5 letras distintas e, portanto, não é um passo lógico.

Mas um pouco de pensamento nos leva a concluir que, mesmo assim, a validade deste argumento é (quase) imediata.

De fato, examinando o argumento, concluímos que a sua validade, embora mais trabalhosa de <u>ser verificada</u>, não é mais difícil de <u>ser percebida</u> do que a validade do passo lógico

$$\begin{array}{l} p \\ p \to q \\ \hline q \end{array}.$$

Na verdade, podemos dizer que a razão da validade (quase imediata) do argumento em questão é que ele consiste de várias *instâncias* deste passo lógico.

De fato, no passo lógico, temos as premissas p e $p \to q$ e concluímos q.

Mas isto não é o que queremos: nós queremos concluir t.

Este problema não é um problema muito difícil, pois agora que temos q e $q \to r$, podemos concluir r. Analogamente, de r e $r \to s$, podemos concluir s. E, finalmente, de s e $s \to t$, concluímos t.

Assim, podemos dizer que o argumento acima pode ser "dissecado" na seguinte sequência de passos lógicos:

$$\begin{array}{l} p \\ p \to q \\ \hline q \end{array}. \quad , \quad \begin{array}{l} q \\ q \to r \\ \hline r \end{array}. \quad , \quad \begin{array}{l} r \\ r \to s \\ \hline s \end{array}. \quad , \quad \begin{array}{l} s \\ s \to t \\ \hline t \end{array}.$$

Desta maneira, podemos justificar a validade do argumento em questão, através de um texto como:

> Suponhamos p, $p \to q$, $q \to r$, $r \to s$ e $s \to t$.
>
> De p e $p \to q$, temos q.
>
> De q e $q \to r$, temos r.
>
> De r e $r \to s$, temos s.
>
> Finalmente, de s e $s \to t$, temos t.

É graças a este texto que dizemos que o argumento é válido, pois a conclusão t é demonstrável a partir das hipóteses p, $p \to q$, $q \to r$, $r \to s$ e $s \to t$, por meio de passos lógicos.

Exemplo 4 Consideremos, agora, o argumento

$$\begin{array}{l} p \lor q \\ \neg p \\ q \to \neg r \\ r \lor (s \land t \land u) \\ \hline u \end{array}$$

Este argumento também não é um passo lógico, mas diferentemente do que acontece com o argumento do Exemplo 3, a tarefa de decidir se ele é válido não parece tão fácil.

Mas, se tentamos aplicar a mesma ideia que usamos acima para comprovar a validade do argumento do Exemplo 3 — ou seja, "dissecar" o argumento em uma sequência de passos lógicos —, podemos dizer que este argumento consiste de *instâncias* dos passos lógicos

$$\begin{array}{c} p \vee q \\ \neg p \\ \hline q \end{array} \quad , \quad \begin{array}{c} q \\ q \to \neg r \\ \hline \neg r \end{array} \quad , \quad \begin{array}{c} \neg r \\ r \vee (s \wedge t \wedge u) \\ \hline s \wedge t \wedge u \end{array} \quad , \quad \begin{array}{c} s \wedge t \wedge u \\ \hline u \end{array}.$$

Desta maneira, podemos justificar a validade do argumento em questão, através de um texto como:

> Suponhamos $p \vee q$, $\neg p$, $q \to \neg r$, e $r \vee (s \wedge t \wedge u)$.
>
> De $p \vee q$ e $\neg p$, temos q.
>
> De q e $q \to (\neg r)$, temos $\neg r$.
>
> De $\neg r$ e $r \vee (s \wedge t \wedge u)$, temos $s \wedge t \wedge u$.
>
> Finalmente, de $s \wedge t \wedge u$, temos u.

É graças a este texto que dizemos que o argumento é válido, pois a conclusão u é demonstrável a partir das hipóteses $p \vee q$, $\neg p$, $q \to \neg r$, e $r \vee (s \wedge t \wedge u)$, por meio de passos lógicos.

Exemplo 5 Consideremos, finalmente, o argumento

$$\begin{array}{l} p \to (r \vee \neg q) \\ \neg r \\ (\neg q) \to s \\ (\neg s) \vee t \\ (\neg r) \to p \\ \hline t \end{array}$$

Novamente, temos um argumento grande e não parece fácil, apenas com uma olhada, determinar se ele é válido ou não.

Agora, com um pouco de pensamento, podemos ver que o argumento pode ser "dissecado" em uma sequência de passos lógicos similares a:

$$\begin{array}{c} \varphi \\ \varphi \to \psi \\ \hline \psi \end{array} \quad , \quad \begin{array}{c} \neg\varphi \\ \varphi \vee \psi \\ \hline \psi \end{array}.$$

De fato, entre as hipóteses do argumento, temos $\neg r$ e $(\neg r) \to p$ e e concluímos p.
Agora, temos p e $p \to (r \vee \neg q)$, e concluímos $r \vee \neg q$.
Agora, temos $\neg r$ e $r \vee \neg q$, e concluímos $\neg q$.
Agora, temos $\neg q$ e $\neg q \to s$, e concluímos s.
Finalmente, de s e $(\neg s) \vee t$, concluímos t, como queríamos.
Desta maneira, podemos justificar a validade do argumento em questão, através de um texto que segue o mesmo padrão dos textos usados nos Exemplos 3 e 4:

Suponhamos $p \to (r \vee \neg q)$, $\neg r$, $(\neg q) \to s$, $(\neg s) \vee t$ e $(\neg r) \to p$.

De $\neg r$ e $(\neg r) \to p$, temos p.

De p e $p \to (r \vee \neg q)$, temos $r \vee \neg q$.

De $\neg r$ e $r \vee (\neg q)$, temos $\neg q$.

De $\neg q$ e $(\neg q) \to s$, temos s.

Finalmente, de s e $(\neg s) \vee t$, temos t.

É graças a este texto que dizemos que o argumento é válido, pois a conclusão t é demonstrável a partir das hipóteses $p \to (r \vee \neg q)$, $\neg r$, $(\neg q) \to s$, $(\neg s) \vee t$ e $(\neg r) \to p$, por meio de passos lógicos.

A ideia geral para a justificativa da validade de um argumento (válido) por meio de passos lógicos é se apoiar na validade de outros argumentos, cujas validades são mais simples de serem detectadas, e usar estas validades na construção, passo a passo, de um texto que justifica a validade do argumento. Este texto parte necessariamente das hipóteses do argumento e vai gradativamente, pela aplicação das outras validades, caminhando para a conclusão do argumento.

Uma *demonstração* (direta) da validade de um argumento é um texto construído passo a passo, a partir das hipóteses do argumento, por meio de aplicações de passos lógicos, como ilustrado nos Exemplos 3, 4 e 5.

2.1 Observações

Observação 3 Uma das etapas principais na construção de uma demonstração é o exame dos dados disponíveis (hipóteses e enunciados intermediários já obtidos previamente) para determinar um passo lógico que possa ser aplicado na obtenção de mais uma linha do texto.

A determinção dos passos lógicos que vão ser usados em cada etapa é uma livre escolha da pessoa que está elaborando e redigindo a demonstração. Como qualquer processo executado por um ser humano, é razoável esperar que, algumas vezes, a pessoa escolha passos lógicos que não são adequados. Isto pode ser dar por duas razões.

A primeira, e mais importante, é que os passos lógicos são argumentos válidos. Muitas vezes, por falta de concentração, podemos escolher um argumento que não é válido e inadequadamente aplicá-lo como um passo lógico. Obviamente, este erro deve ser evitado a todo custo!

A segunda é que, geralmente, a construção de uma demonstração requer que encontremos passos lógicos que nos levem das hipóteses em direção à conclusão. Mas nem sempre podemos garantir que a cada passo estamos fazendo isso.

Por exemplo, na construção de uma demonstração para a validade do argumento

$$\begin{array}{l} (p \vee q) \wedge (p \vee \neg r) \\ s \to t \\ t \to \neg q \\ s \wedge t \\ \hline p \end{array}$$

uma pessoa pode escolher o passo lógico

$$\begin{array}{l} (p \vee q) \wedge p \vee (\neg r) \\ \hline p \vee \neg r \end{array}$$

pensando em, posteriormente, obter r a partir das outras premissas para, depois, obter p.

Mas, observe que se interpretamos $p : V$, $q : F$, $r : F$, $s : V$ e $t : V$, mostramos que o argumento

$$\begin{array}{l} p \vee \neg r \\ s \to t \\ t \to \neg q \\ s \wedge t \\ \hline r \end{array}$$

pode ter premissas simultaneamente V e conclusão F, ou seja, é inválido.

Assim, não há como obter r a partir de $p \vee \neg r$, $s \to t$, $t \to \neg q$ e $s \wedge t$ por meio de passos lógicos. E esta estratégia inicial está fadada ao fracasso.

3 Redação das demonstrações diretas

Um ponto importante a ser observado é que nos textos de Linguagem e Lógica Matemáticas é usual convencionar-se o uso de números na rotulação dos enunciados envolvidos. A adoção destas notações procura facilitar a redação e posterior leitura das demonstrações.

As convenções que vamos adotar aqui estão explicadas na Figura 1, na página 23.

Por meio destas convenções, as demonstrações são escritas de uma maneira especial, visando explicitar o fluxo de raciocínio que foi usado nas suas elaborações.

Para assimilar as ideias e notações envolvidas na elaboração e redação das demonstrações, vamos reescrever os Exemplos 3, 4 e 5, usando as convenções da Figura 1, na página 23.

Exemplo 6 (a) No Exemplo 3, vimos que o argumento

$$\begin{array}{l} p \\ p \to q \\ q \to r \\ r \to s \\ s \to t \\ \hline t \end{array}$$

é válido e apresentamos uma demonstração da sua validade. A demonstração se resume no seguinte texto, que explica como podemos aplicar os passos lógicos, de modo a obter a conclusão a partir das premissas:

> Suponhamos p, $p \to q$, $q \to r$, $r \to s$ e $s \to t$.
>
> De p e $p \to q$, temos q.
>
> De q e $q \to r$, temos r.
>
> De r e $r \to s$, temos s.
>
> Finalmente, de s e $s \to t$, temos t.

De acordo com a notação que estamos adotando agora, este texto dever ser escrito do seguinte modo:

Demonstração:
Suponhamos:

	1.	p
	2.	$p \to q$
	3.	$q \to r$
	4.	$r \to s$
	5.	$s \to t$

Daí, temos:

1, 2	6.	q
6, 3	7.	r
7, 4	8.	s
8, 5	9.	t ■

(b) No Exemplo 4, vimos que o argumento

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ \neg p \\ q \to \neg r \\ r \vee (s \wedge t \wedge u) \\ \hline u \end{array}$$

é válido e apresentamos uma demonstração da sua validade. A demonstração se resume no seguinte texto, que explica como podemos aplicar os passos lógicos, de modo a obter a conclusão a partir das premissas:

> Suponhamos $p \vee q$, $\neg p$, $q \to \neg r$, e $r \vee (s \wedge t \wedge u)$.
>
> De $p \vee q$ e $\neg p$, temos q.
>
> De q e $q \to \neg r$, temos $\neg r$.
>
> De $\neg r$ e $r \vee (s \wedge t \wedge u)$, temos $s \wedge t \wedge u$.
>
> Finalmente, de $s \wedge t \wedge u$, temos u.

De acordo com a notação que estamos adotando agora, este texto dever ser escrito do seguinte modo:

Demonstração:
Suponhamos:

	1.	$p \vee q$
	2.	$\neg p$
	3.	$q \to \neg r$
	4.	$r \vee (s \wedge t \wedge u)$
Daí:		
2, 1	5.	q
5, 3	6.	$\neg r$
6, 4	7.	$s \wedge t \wedge u$
7	9.	u ■

(c) No Exemplo 5, vimos que o argumento

$$\begin{array}{l} p \to (r \vee \neg q) \\ \neg r \\ (\neg q) \to s \\ (\neg s) \vee t \\ (\neg r) \to p \\ \hline t \end{array}$$

é válido e apresentamos uma demonstração da sua validade. A demonstração se resume no seguinte texto, que explica como podemos aplicar os passos lógicos, de modo a obter a conclusão a partir das premissas:

Suponhamos $p \to (r \vee \neg q)$, $\neg r$, $(\neg q) \to s$, $(\neg s) \vee t$ e $(\neg r) \to p$.

De $\neg r$ e $(\neg r) \to p$, temos p.

De p e $p \to (r \vee \neg q)$, temos $r \vee (\neg q)$.

De $\neg r$ e $r \vee \neg q$, temos $\neg q$.

De $\neg q$ e $(\neg q) \to s$, temos s.

Finalmente, de s e $(\neg s) \vee t$, temos t.

De acordo com a notação que estamos adotando agora, este texto dever ser escrito do seguinte modo:

Demonstração:
Suponhamos:

	1.	$p \to (r \vee \neg q)$
	2.	$\neg r$
	3.	$(\neg q) \to s$
	4.	$(\neg s) \vee t$
	5.	$(\neg r) \to p$
Daí:		
2, 5	6.	p
6, 1	7.	$r \vee \neg q$
2, 7	8.	$\neg q$
8, 3	9.	s
9, 4	10.	t ■

3.1 Observações

Observação 4 Podemos agora descrever, em linhas gerais, um dos principais procedimentos usados pelos matemáticos para justificar que uma conclusão φ é demonstrável a partir das hipóteses $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$:

1. Dizemos que a validade de um argumento simbolizado é *imediata* se ela pode ser verificada por uma tabela verdade que possui, no máximo, 8 linhas.

2. Se a validade de um argumento simbolizado é imediata, estabelecemos esta validade por meio de uma tabela de avaliação.

3. Dizemos que a validade de um argumento simbolizado é *não imediata* se para verificá-la precisamos utilizar uma tabela verdade que possui mais do que 8 linhas.

4. Se a validade de um argumento simbolizado é não imediata, estabelecemos esta validade por meio de uma demonstração baseada em passos lógicos, do seguinte modo:

   (a) Supomos $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, para demonstrar φ.

   (b) Examinamos $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ de modo a elaborar passos lógicos que levem a enunciados intermediários que, por sua vez, levem a demonstração de φ.

   (c) Por aplicação dos passos lógicos seguimos na obtenção de mais e mais enunciados que nos levam a demonstração de φ.

   Se o procedimento acima é bem sucedido, terminamos a demonstração (escrevendo um texto nos moldes exemplificados na Seção 3) e concluímos que φ é demonstrável a partir de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$.

3.2 Exercícios resolvidos

Exercício 4 Construir demonstrações para a validade dos argumentos a seguir.

(i) $$\begin{array}{l} p \\ p \to (q \wedge r) \\ q \to (s \wedge t) \\ \hline t \end{array}$$

(ii) $$\begin{array}{l} p \wedge q \\ q \to r \\ r \to (s \wedge t) \\ t \to (u \wedge v) \\ \hline u \end{array}$$

(iii) $$\begin{array}{l} \neg p \\ p \vee (q \wedge r) \\ (\neg r) \wedge t \\ \hline t \end{array}$$

(iv) $$\begin{array}{l} (p \vee q) \wedge (p \vee (\neg r)) \\ s \to t \\ t \to \neg q \\ s \wedge t \\ \hline p \end{array}$$

(v) $$\begin{array}{l} q \to t \\ s \wedge q \\ t \to r \\ \neg r \vee (s \vee t) \\ \hline s \vee t \end{array}$$

(vi) $$\begin{array}{l} \neg p \vee (q \to r) \\ t \wedge p \\ t \to q \\ \hline r \vee s \end{array}$$

Para resolver esta questão é essencial que respeitemos a maneira como as demonstrações devem ser escritas, isto é: sempre que escrevemos uma demonstração, iniciamos o texto com as frases

Demonstração:
Suponhamos:

seguidas de todas as hipóteses rotuladas em sequência, na ordem em que elas são dadas no argumento.

Depois escrevemos

Daí:

e escrevemos os enunciados intermediários em sequência, rotulados de acordo com a maneira em que eles vão aparecendo na demonstração.

E finalizamos com o símbolo

$\blacksquare$

quando chegamos na conclusão (veja todos os detalhes na Figura 1, na página 23).

Exercício 5 Para convencer um colega que LCC é uma matéria importante, uma aluna usou o seguinte argumento:

LCC é uma matéria importante, pois em LCC estudamos Lógica e Linguagem.
LCC não é uma matéria importante ou deveria ser obrigatória para todos.
Em LCC estudamos Lógica e Lógica é essencial.
Em LCC estudamos Linguagem e Linguagem é essencial.
Logo, LCC deveria ser obrigatória para todos.

Mostre que o argumento da aluna é válido exibindo uma demonstração da sua validade.

Exercício 6 Um colega seu de LCC fez a prova de um concurso em que se pedia que se determinasse a conclusão de um argumento que tem as seguintes premissas, de modo que o argumento fosse válido:

Se as metas de inflação são reais, então a crise econômica demorará a ser superada e o País entrará em colapso.
Se as metas de inflação não são reais, então os superávits primários são fantasiosos.
Os superávits primários não são fantasiosos e o Ministro está certo.
O País não entrará em colapso ou a crise afetará a economia.

Ele disse que aplicando passos lógicos, respondeu que, neste caso, a conclusão pode ser

a crise econômica demorará a ser superada e a crise afetará a economia

Mas o *gabarito da prova* afirmava que a resposta correta é

a crise econômica demorará a ser superada

Como os dois enunciados apareciam como opções no enunciado, o colega estava pedindo a anulação da questão.

Mostre que o colega está correto em sua alegação, exibindo uma demonstração que leva à conclusão que ele obteve.

Exercício 7 Mostre que o seguinte argumento é válido, simbolizando-o e apresentando uma demonstração da sua validade:

Di Stéfano era zagueiro e se Pelé era jogador, então Maradona era goleiro.
Se Platini era lateral, então Puskás não era treinador.
Se Di Stéfano era zagueiro, então Platini era lateral.
Puskás era treinador ou Maradona não era goleiro.
Logo, Pelé não era jogador.

Antes de ler a resolução, tente resolver o exercício usando os conceitos estudados.

Resolução do Exercício 4: (i)

Demonstração:
Suponhamos:

	1.	p
	2.	$p \to (q \wedge r)$
	3.	$q \to (s \wedge t)$
Daí:		
1, 2	4.	$q \wedge r$
4	5.	q
5, 3	6.	$s \wedge t$
6	7.	t ■

(ii)

Demonstração:
Suponhamos:

	1.	$p \wedge q$
	2.	$q \to r$
	3.	$r \to (s \wedge t)$
	4.	$t \to (u \wedge v)$
Daí:		
1	5.	q
5, 2	6.	r
6, 3	7.	$s \wedge t$
7	8.	t
8, 4	9.	$u \wedge v$
9	10.	u ■

(iii)

Demonstração:
Suponhamos:

	1.	$\neg p$
	2.	$p \vee (q \wedge r)$
	3.	$(\neg r) \wedge t$
Daí:		
3	4.	t ■

(iv)

Demonstração:
Suponhamos:

	1.	$(p \vee q) \wedge (p \vee \neg r)$
	2.	$s \to t$
	3.	$t \to \neg q$
	4.	$s \wedge t$
Daí:		
4	5.	t
5, 3	6.	$\neg q$
1	7.	$p \vee q$
6, 7	8.	p ■

(v)

Demonstração:
Suponhamos:

	1.	$q \to t$
	2.	$s \wedge q$
	3.	$t \to r$
	4.	$\neg r \vee (s \vee t)$
Daí:		
2	5.	s
5	6.	$s \vee t$ ■

Para o item

(vi) *Demonstração*:
Suponhamos:

	1.	$\neg p \vee (q \to r)$
	2.	$t \wedge p$
	3.	$t \to q$
Daí:		
2	4.	p
4, 1	5.	$q \to r$
2	6.	t
6, 3	7.	q
7, 5	8.	r
8	9.	$r \vee s$ ■

Resolução do Exercício 5: Como sempre, iniciamos com uma *Legenda*:

p	:	MD é uma matéria importante
q	:	em MD estudamos Lógica
r	:	em MD estudamos Linguagem
s	:	MD deveria ser obrigatória para todos
t	:	Lógica é essencial
u	:	Linguagem é essencial

. Depois, *Simbolização*:

$$\begin{array}{l} (q \wedge r) \to p \\ (\neg p) \vee s \\ q \wedge t \\ r \wedge u \\ \hline s \end{array}$$

. Finalmente, *Demonstração*:

Demonstração:
Suponhamos:

	1.	$(q \wedge r) \to p$
	2.	$(\neg p) \vee s$
	3.	$q \wedge t$
	4.	$r \wedge u$
Daí:		
3	5.	q
4	6.	r
5, 6	7.	$q \wedge r$
7, 1	8.	p
8, 2	9.	s ■

Resolução do Exercício 6: Primeiro, *Legenda*:

p	:	as metas de inflação são reais
q	:	a crise econômica demorará a ser superada
r	:	o País entrará em colapso
s	:	os superávits primários são fantasiosos
t	:	o Ministro está certo
u	:	a crise afetará a economia

. Depois, *Simbolização*:

$$\begin{array}{l} p \to (q \wedge r) \\ \neg p \to s \\ \neg s \wedge t \\ \neg r \vee u \end{array}$$

.

A conclusão do colega pode simbolizada por $q \wedge u$. Por fim, fazemos uma

Demonstração:
Suponhamos:

	1.	$p \to (q \wedge r)$
	2.	$\neg p \to s$
	3.	$\neg s \wedge t$
	4.	$\neg r \vee u$
Daí:		
3	5.	$\neg s$
2, 5	6.	p
1, 6	7.	$q \wedge r$
7	8.	q
7	9.	r
4, 9	10.	u,
8, 10	11.	$q \wedge u$ ■

Resolução do Exercício 7: *Legenda*:

j	:	Pelé era jogador
g	:	Maradona era goleiro
z	:	Di Stéfano era zagueiro
l	:	Platini era lateral
t	:	Puskás era treinador

. Depois, *Simbolização*:

$$\frac{\begin{array}{l} z \wedge (j \to g) \\ l \to \neg t \\ z \to l \\ t \vee (\neg g) \end{array}}{\neg j}$$

. Finalmente, *Demonstração*:

Demonstração:

Suponhamos:

	1.	$z \wedge (j \to g)$
	2.	$l \to \neg t$
	3.	$z \to l$
	4.	$t \vee (\neg g)$
Daí:		
1	5.	z
5, 3	6.	l
6, 2	7.	$\neg t$
7, 4	8.	$\neg g$
1	9.	$j \to g$
8, 9	10.	$\neg j$ ■

Uma *demonstração* da validade de um argumento simbolizado é um texto contendo uma sequência de enunciados simbolizados, satisfazendo, ao menos, as seguintes condições:

- O texto inicia com a frase

  Demonstração:

  deixando bem claro que estamos fazendo uma demonstração.

- O texto continua com a frase

  Suponhamos:

  caracterizando que estamos admitindo que as hipóteses do argumento são verdadeiras.

- A seguir, temos a ocorrência de todas as hipóteses rotuladas com 1, 2, 3, ..., n, para futura referência no texto, na mesma ordem em que elas aparecem no argumento.

- A seguir, escrevemos a frase

  Daí:

  seguida de uma lista de enunciados cujo último termo é a conclusão do argumento.

- Os enunciados simbolizados que não são nem as hipóteses nem a conclusão do argumento, chamados de *enunciados intermediários*, são obtidos a partir das hipóteses — possivelmente em conjunto com outros enunciados intermediários já obtidos previamente — cada um por uma aplicação de um argumento cuja validade é imediata.

- Os enunciados intermediários são rotulados em sequencia com n+1, n+2, n+3, ..., n+k, para futura referência no texto.

- A última linha do texto, rotulada $\mathsf{n} + \mathsf{k} + 1$, contém a conclusão do argumento e é marcada com um

  $\blacksquare$

  caracterizando que estamos obtendo a conclusão a partir das hipóteses.

Figura 1: Convenções para a redação da demonstração da validade de argumentos.